Logique des prédicats

Damien Nouvel

Plan

Propositions vs prédicats

- Avantages et inconvénients la logique des propositions

Propositions vs prédicats

- Avantages et inconvénients la logique des propositions
  - + **Formalisation** logique solide
  - + Possibilité de **démonstrations**
  - + Monde clos

Propositions vs prédicats

- Avantages et inconvénients la logique des propositions
  - \+ **Formalisation** logique solide
  - \+ Possibilité de **démonstrations**
  - \+ Monde clos
  - \- Pas de **fonctions**
  - \- Pas de **catégories**
  - \- Pas de formules **génériques**

Propositions vs prédicats

- Avantages et inconvénients la logique des propositions
  - \+ **Formalisation** logique solide
  - \+ Possibilité de **démonstrations**
  - \+ Monde clos
  - \- Pas de **fonctions**
  - \- Pas de **catégories**
  - \- Pas de formules **génériques**
- Exemple
  - Jean est le père de Jacques et Alain, et Roger et le père de Tom.
  - On sait que le père d'un père s'appelle un grand-père.
  - Qui est le grand-père de Tom ?

Propositions vs prédicats

- Avantages et inconvénients la logique des propositions
  - \+ **Formalisation** logique solide
  - \+ Possibilité de **démonstrations**
  - \+ Monde clos
  - \- Pas de **fonctions**
  - \- Pas de **catégories**
  - \- Pas de formules **génériques**
- Exemple
  - Jean est le père de Jacques et Alain, et Roger et le père de Tom.
  - On sait que le père d'un père s'appelle un grand-père.
  - Qui est le grand-père de Tom ?

  $\Rightarrow$ *Raisonnement logique, évident pour un humain*

  $\Rightarrow$ *Impossible à formuler correctement en logique des propositions*

Propositions vs prédicats

- Avantages et inconvénients la logique des propositions
  - + **Formalisation** logique solide
  - + Possibilité de **démonstrations**
  - + Monde clos
  - - Pas de **fonctions**
  - - Pas de **catégories**
  - - Pas de formules **génériques**
- Exemple
  - Jean est le père de Jacques et Alain, et Roger et le père de Tom.
  - On sait que le père d'un père s'appelle un grand-père.
  - Qui est le grand-père de Tom ?
  - ⇒ *Raisonnement logique, évident pour un humain*
  - ⇒ *Impossible à formuler correctement en logique des propositions*

⇒ *Logique des* **prédicats** *étend la logique des propositions*

Quantité et qualité des formules

- On peut qualifier les propositions selon

Quantité et qualité des formules

- On peut qualifier les propositions selon
  - Leur **quantité** : **universelle** vs **particulière**

Quantité et qualité des formules

- On peut qualifier les propositions selon
  - Leur **quantité** : **universelle** vs **particulière**
    - **Extension** (ou dénotation)

$\Rightarrow$ *Ensemble d'***individus** *dans le dans le* **domaine** *du discours*

$\Rightarrow$ *Par ex. : Homme* $\rightarrow$ *Damien* $\vee$ *Pierre* $\vee$ *Paul* $\vee$ *Jacques*...

Quantité et qualité des formules

- On peut qualifier les propositions selon
  - Leur **quantité** : **universelle** vs **particulière**
    - **Extension** (ou dénotation)

    $\Rightarrow$ *Ensemble d'***individus** *dans le dans le* **domaine** *du discours*

    $\Rightarrow$ *Par ex. : Homme* $\rightarrow$ *Damien* $\vee$ *Pierre* $\vee$ *Paul* $\vee$ *Jacques* ...
    - **Compréhension** (ou intention)

    $\Rightarrow$ *Ensemble de caractères*

    $\Rightarrow$ *Par ex. :* $Homme(x) \rightarrow Humain(x) \wedge Male(x)$

Quantité et qualité des formules

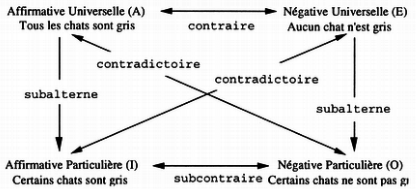
- On peut qualifier les propositions selon
  - Leur **quantité** : **universelle** vs **particulière**
    - **Extension** (ou dénotation)

    ⇒ *Ensemble d'***individus** *dans le dans le* **domaine** *du discours*

    ⇒ *Par ex. : Homme* $\rightarrow$ *Damien* $\vee$ *Pierre* $\vee$ *Paul* $\vee$ *Jacques* ...
    - **Compréhension** (ou intention)

    ⇒ *Ensemble de caractères*

    ⇒ *Par ex. :* $Homme(x) \rightarrow Humain(x) \wedge Male(x)$
  - Leur **qualité** : **affirmative** ou **négative**



Carré logique (Aristote)

Alphabet

- Élements pour la logique des prédicats :

Alphabet

- Élements pour la logique des prédicats :
  - Variables et constantes
    - $V = x, y, z$ et $C = a, b, c, Pierre, Paul, Jacques \ldots$

Alphabet

- Élements pour la logique des prédicats :
  - Variables et constantes
    - $V = x, y, z$ et $C = a, b, c, Pierre, Paul, Jacques \dots$
  - Négation et connecteurs logiques
    - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Alphabet

- Élements pour la logique des prédicats :
  - Variables et constantes
    - $V = x, y, z$ et $C = a, b, c, Pierre, Paul, Jacques \ldots$
  - Négation et connecteurs logiques
    - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - **Prédicats**
    - $P(x), Q(x,z), maries(x,y)$, $pere(x,y)$, $cousin(x,y)$
    - Application dans les valeurs de vérités

Alphabet

- Élements pour la logique des prédicats :
  - Variables et constantes
    - $V = x, y, z$ et $C = a, b, c, Pierre, Paul, Jacques \ldots$
  - Négation et connecteurs logiques
    - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - **Prédicats**
    - $P(x), Q(x, z), maries(x, y)$, $pere(x, y)$, $cousin(x, y)$
    - Application dans les valeurs de vérités
  - **Fonctions**
    - $f(x), g(x, y), mari(x)$, $pere(x)$
    - Application dans le domaine

Alphabet

- Élements pour la logique des prédicats :
  - Variables et constantes
    - $V = x, y, z$ et $C = a, b, c, Pierre, Paul, Jacques \dots$
  - Négation et connecteurs logiques
    - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - **Prédicats**
    - $P(x), Q(x, z), maries(x, y)$, $pere(x, y)$, $cousin(x, y)$
    - Application dans les valeurs de vérités
  - **Fonctions**
    - $f(x), g(x, y), mari(x)$, $pere(x)$
    - Application dans le domaine
  - **Quantificateurs**
    - $\forall$ (universel) et $\exists$ (existentiel)
    - Opérateurs unaires sur les variables, ayant une **portée**

Alphabet

- Élements pour la logique des prédicats :
  - Variables et constantes
    - $V = x, y, z$ et $C = a, b, c, Pierre, Paul, Jacques \ldots$
  - Négation et connecteurs logiques
    - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - **Prédicats**
    - $P(x), Q(x, z), maries(x, y)$, $pere(x, y)$, $cousin(x, y)$
    - Application dans les valeurs de vérités
  - **Fonctions**
    - $f(x), g(x, y), mari(x)$, $pere(x)$
    - Application dans le domaine
  - **Quantificateurs**
    - $\forall$ (universel) et $\exists$ (existentiel)
    - Opérateurs unaires sur les variables, ayant une **portée**

$\Rightarrow$ *Exemple de formule :* $\forall x, \exists y, y < x$

Définitions

- **Termes**
  - Toute variable
  - Toute fonction $f(x, y, z)$ si x, y et z sont des termes

Définitions

- **Termes**
  - Toute variable
  - Toute fonction $f(x, y, z)$ si x, y et z sont des termes
- Formule **atomique**
  - Si P est un prédicat à n arguments et $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des termes, alors $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est une formule atomatique

Définitions

- **Termes**
  - Toute variable
  - Toute fonction $f(x, y, z)$ si x, y et z sont des termes
- Formule **atomique**
  - Si P est un prédicat à n arguments et $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des termes, alors $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est une formule atomatique
- **Formule bien formée**
  - Comme pour les propositions pour $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $()$
  - Si une formule est atomique elle est bien formée
  - Si Q est un quantificateur, x une variable et F une formule bien formée, alors QxF est également bien formée

Définitions

- **Termes**
  - Toute variable
  - Toute fonction $f(x, y, z)$ si x, y et z sont des termes
- Formule **atomique**
  - Si P est un prédicat à n arguments et $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des termes, alors $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est une formule atomatique
- **Formule bien formée**
  - Comme pour les propositions pour $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $()$
  - Si une formule est atomique elle est bien formée
  - Si Q est un quantificateur, x une variable et F une formule bien formée, alors QxF est également bien formée
- **Portée** des quantificateurs
  - Si Q est un quantificateur, x une variable et F une formule bien formée, alors la portée de Qx est F

$\Rightarrow$ *Exemple :* $P(x) \wedge \exists \underline{x}(P(\underline{x}, y) \wedge \forall \underline{y} \neg Q(\underline{x}, \underline{y}) \vee \neg R(\underline{x}, y))$

Liaison de variables

- Dans une formule, selon la **portée** des quantificateurs

Liaison de variables

- Dans une formule, selon la **portée** des quantificateurs
  - Variable **liée** : si elle est dans la portée d'un quantificateur

$\Rightarrow$ *Exemple :* $\forall x P(x)$, $\forall x P(x) \wedge (\exists y Q(x, y))$

Liaison de variables

- Dans une formule, selon la **portée** des quantificateurs
  - Variable **liée** : si elle est dans la portée d'un quantificateur

  $\Rightarrow$ *Exemple :* $\forall x P(x)$, $\forall x P(x) \wedge (\exists y Q(x, y))$
  - Variable **libre** : si elle n'est pas liée

  $\Rightarrow$ *Exemple :* $P(x)$, $\forall x (P(x) \wedge Q(x, y))$

Liaison de variables

- Dans une formule, selon la **portée** des quantificateurs
  - Variable **liée** : si elle est dans la portée d'un quantificateur

  $\Rightarrow$ *Exemple :* $\forall x P(x)$, $\forall x P(x) \wedge (\exists y Q(x, y))$
  - Variable **libre** : si elle n'est pas liée

  $\Rightarrow$ *Exemple :* $P(x)$, $\forall x (P(x) \wedge Q(x, y))$
- Une formule peut être
  - **Close** : toutes les variables sont liées
  - **Ouverte** : il existe au moins une variable libre

  $\Rightarrow$ *Nous travaillons sur les formules closes*

Sémantique, domaine et interprétation

- Une **interprétation** I est constituée des éléments suivants

Sémantique, domaine et interprétation

- Une **interprétation** I est constituée des éléments suivants
  - **Domaine** D : valeurs que peuvent prendre les constantes
  - Constantes : élément de D
  - Prédicats : application de D^n dans $\{V, F\}$
  - Fonctions : application de D^n dans D

$\Rightarrow$ *Une interprétation est un* **modèle** *pour une formule si elle la rend toujours vraie dans le domaine*

- Exemple

Sémantique, domaine et interprétation

- Une **interprétation** I est constituée des éléments suivants
  - **Domaine** D : valeurs que peuvent prendre les constantes
  - Constantes : élément de D
  - Prédicats : application de D^n dans $\{V, F\}$
  - Fonctions : application de D^n dans D

$\Rightarrow$ *Une interprétation est un* **modèle** *pour une formule si elle la rend toujours vraie dans le domaine*

- Exemple
  - Formule : $\forall x(p(x) \rightarrow q(x, f(x)))$
  - Domaine : $D = [0, +\infty]$
  - Prédicats : $p(x)$ est vrai si $x < 1$, $q(x, y)$ est vrai si $x > y$
  - Fonctions : $f(x) = x^2$

Sémantique, domaine et interprétation

- Une **interprétation** I est constituée des éléments suivants
  - **Domaine** D : valeurs que peuvent prendre les constantes
  - Constantes : élément de D
  - Prédicats : application de D^n dans $\{V, F\}$
  - Fonctions : application de D^n dans D

$\Rightarrow$ *Une interprétation est un* **modèle** *pour une formule si elle la rend toujours vraie dans le domaine*

- Exemple
  - Formule : $\forall x(p(x) \rightarrow q(x, f(x)))$
  - Domaine : $D = [0, +\infty]$
  - Prédicats : $p(x)$ est vrai si $x < 1$, $q(x, y)$ est vrai si $x > y$
  - Fonctions : $f(x) = x^2$

  $\Rightarrow$ *Cette interprétation est un modèle pour la formule*

Sémantique, domaine et interprétation

- Une **interprétation** I est constituée des éléments suivants
  - **Domaine** D : valeurs que peuvent prendre les constantes
  - Constantes : élément de D
  - Prédicats : application de D^n dans $\{V, F\}$
  - Fonctions : application de D^n dans D

$\Rightarrow$ *Une interprétation est un* **modèle** *pour une formule si elle la rend toujours vraie dans le domaine*

- Exemple
  - Formule : $\forall x(p(x) \rightarrow q(x, f(x)))$
  - Domaine : $D = [0, +\infty]$
  - Prédicats : $p(x)$ est vrai si $x < 1$, $q(x, y)$ est vrai si $x > y$
  - Fonctions : $f(x) = x^2$

  $\Rightarrow$ *Cette interprétation est un modèle pour la formule*

  $\Rightarrow$ *Si l'on change le domaine, ça n'est plus un modèle*

Exercices

- Modélisez selon la logique des prédicats
  - Jacques est le fils de Marie
  - Tout le monde a un père
  - Jean aime tout le monde
  - Jacques n'aime pas tout le monde
  - Personne n'aime Jacques
  - Jean aime Marie mais Marie aime quelqu'un d'autre
  - Jean aime une personne qui ne l'aime pas
  - L'ami de mon ami est mon ami

Plan

Substitution

- Substitution de variables
  - Remplacement d'une variable par une expression
  - Notation : pour une proposition A remplacer x par B se note $A[x/B]$

  ⇒ *Exemple :* $\forall x \exists y P(x,y)[x/z] \forall z \exists y P(z,y)$

⇒ *Utile pour la mise sous forme prénexe et skolémisation, lorsque deux sous fomules ont les mêmes variables*

- Ordre des quantificateurs peut être modifié
  - $\forall x \forall y \equiv \forall y \forall x$
  - $\exists x \exists y \equiv \exists y \exists x$
  - Attention : $\forall x \exists y \not\equiv \exists y \forall x$

Mise sous forme normale prénexe

- Une formule est sous **forme prénexe** si elle s'écrit $Q_1 Q_2 \ldots Q_n F$
  - $Q_1 \ldots Q_n$ sont des quantificateurs
  - F est sans quantificateurs

$\Rightarrow$ *On amène tous les quantificateurs en début de formule*

- Si F et G sont des formules
  - Suppression des négations
    - $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$
    - $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
  - Si G est libre de x
    - $\forall x F \vee G \equiv \forall x (F \vee G)$
    - $\forall x F \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$
    - $\exists x F \vee G \equiv \exists x (F \vee G)$
    - $\exists x F \wedge G \equiv \exists x (F \wedge G)$
- Exercice
  - Avec G est libre de x, mettre sous forme prénexe $(\forall x F) \rightarrow G$

Forme normale de Skolem

- **Quantificateur existentiel** : une constante satisfait la formule
  - Il existe un homme qui a été président des États-Unis
  - $\equiv \exists x Homme(x) \wedge President(x, USA)$
  - $\equiv Homme(BillClinton) \wedge President(BillClinton, USA)$
- Sous **quantification universelle** l'individu dépend d'une **fonction**
  - Chaque président des États-Unis est assisté par un vice président
  - $\equiv \forall x President(x, USA) \rightarrow \exists y VicePresident(x, y)$
  - $\equiv \forall x \exists y President(x, USA) \rightarrow VicePresident(x, y)$
  - $\equiv \forall x President(x, USA) \rightarrow VicePresident(x, NominationVP(x))$
- La **skolémisation** consiste à remplacer tous les $\exists$ par
  - Des constantes s'il n'y a pas de quantification existentielle avant
  - Sinon des fonctions des variables quantifiées existentiellement

Forme normale clausale

- Forme normale clausale
  - Forme normale de Skolem
  - Forme normale conjonctive
- Résolvant de Robinson
  - Si deux clauses sont sous la forme
    - $F = F_1 \vee F_2 \dots F_i \dots F_n$
    - $G = G_1 \vee G_2 \dots G_j \dots G_n$
  - Et si $F_i \equiv \neg G_j$ alors la clause H résultant de la disjonction de F et G après suppression de F_i et G_j est appelée clause résolvante de F et G
  - $H = F_1 \vee F_2 \dots F_{i-1} \vee F_{i+1} \dots F_n \vee G_1 \vee G_2 \dots G_{j-1} \vee G_{j+1} \dots F_n$

Exercices

- Modélisez, mettez sous forme clausale
  - Il existe une capitale où se trouve la Tour Eiffel
  - Chaque capitale a un monument
  - Si tous les hommes sont mortels, alors le père Noël n'existe pas
  - S'il existe un homme naïf alors le père Noël existe