Langages hors-contexte

Damien Nouvel

Plan

Langages réguliers et grammaires

- Les langages **réguliers** (ou rationnels) reconnaissent
  - Des mots issus de lexiques
  - Des formes normales (chiffres, dates, etc.)

$\Rightarrow$ Ils sont **insuffisants** pour

- Les formes récursives
- Les structures de type $\{a^n b^n\}$
- La recherche de la syntaxe dans le langage naturel
- L'analyse de programmes

$\Rightarrow$ La machine de Turing peut faire mieux que ça !

Historique des grammaires

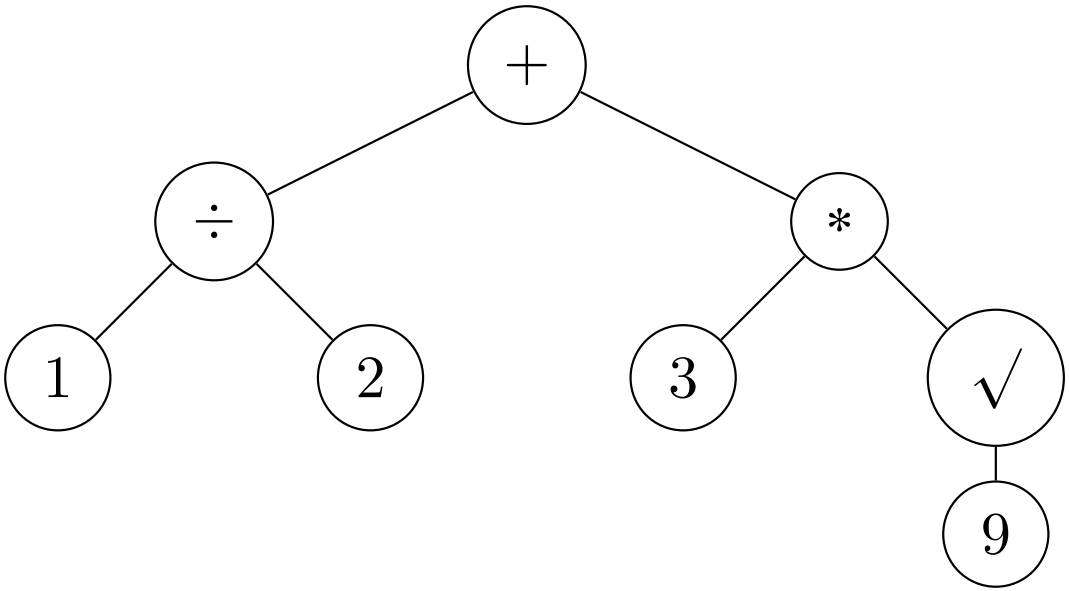
- Hiérarchie de **Chomsky** (1956)
  - Analyse du langage **naturel** (morphologie, syntaxe)
  - Grammaire formelles
    - Type 0 : grammaires générales (machine de Turing)
    - Type 1 : grammaires contextuelles (automates lin. bornés)
    - Type 2 : grammaires **hors-contexte** (automates à pile)
    - Type 3 : grammaires **régulières** (automates à états finis)
- Langages de programmation **artificiels** (compilation)
  - Compilateurs mot-à-mot (assembleur)
  - Expressions mathématiques : **arbres** d'analyse
  - Compilateurs modernes
    - Analyse **lexicale** (scanner)
    - Analyse **syntaxique** (parser)

$\Rightarrow$ Utilisation des méthodes linguistiques pour la programmation

Plan

Arbre d'expression

- Analyse de l'expression mathématique $\frac{1}{2} + 3 * \sqrt{9}$
  - Priorité des opérateurs : $(\frac{1}{2} + (3 * \sqrt{9}))$
  - Arbre d'expression :



$\Rightarrow$ Chaque branche est aussi une expression valide : $\frac{1}{2}$, $3 * \sqrt{9}$

Backus-Naur Form

- Langage de programmation Algol 1960 (J. Backus et P. Naur)
- Règles de description du langage
  - Pour la programmation

```
<ifstruct> ::= "if" "(" <test> ")" "{" <block> "}"
<test> ::= <var> "==" <num> | <var> "&&" <var> | …
<block> ::= <inst> | <inst> <block>
```

  ⇒ **Vérification** de la syntaxe des programmes

  ⇒ **Récursivité** dans les règles

  - Pour la linguistique

```
<E> ::= <GN> <GV>
<GN> ::= <DET> <NC> | <DET> <ADJ> <NC>
<GV> ::= "marche" | "dort"
<DET> ::= "le"
<NC> ::= "chien" | "chat"
<ADJ> ::= "petit" | "gros"
```

Définition des grammaires hors-contexte

⇒ **Reconnaissance** / **génération** de langages

- Quadruplet $G = (T, N, R, S)$
  - T : symboles terminaux

  ⇒ Les **mots** possibles des énoncés
  - N : symboles non-terminaux

  ⇒ Groupes de mots intéressants (GN, GV, etc.)
  - $R \subset N \times (N \cup T)^*$: règles

  ⇒ Déterminent la composition des groupes de mots

  ⇒ **Notations**
    - Une règle s'écrit $A \to \alpha$ avec $A \in N$ et $\alpha \in (N \cup T)^*$
    - Des règles $A \to \alpha$ et $A \to \beta$ s'écrivent $A \to \alpha|\beta$
  - $S \in N$: axiome (symbole de départ)

  ⇒ Représente l'énoncé

Exemple

- Expressions mathématiques
  - $N = \{S, E\}$ et $T = \{+, *, \div, \sqrt{}, (,), 1, 2, 3...\}$
  - Règles :

    $S \rightarrow E$

    $E \rightarrow E + E$

    $E \rightarrow E * E$

    $E \rightarrow E \div E$

    $E \rightarrow (E)$

    $E \rightarrow \sqrt{E}$

    $E \rightarrow 1|2|3\ldots$
- Une **dérivation** possible :

  $S \rightarrow E \rightarrow E + E \rightarrow E \div E + E \cdots \rightarrow 1 \div 2 + 3 * \sqrt{9}$

Exercices

- Définissez des grammaires qui reconnaissent
  - Le langage des dates au format `jj/mm/aaaa`
  - Un plaque d'immatriculation françaises
  - Un nombre entier naturel (positif)
  - Un nombre réel
  - Le langage régulier ab^*cd^*
  - Le langage $\{a^n c^n, n > 0\}$
  - Les palindrômes
  - Une expression de parenthèses `()` et crochets `[]`
  - Le langage $\{a^n b c^m d, n > 0, m \geqslant n\}$

Plan

Dérivation

- Opérations qui **génèrent** le langage pour une grammaire
- Un mot $\alpha \in (N \cup T)^*$ se **dérive** en un mot $\beta \in (N \cup T)^*$ si
  - α se décompose en $\alpha_1 A \alpha_2$ avec $A \in N$
  - β se décompose en $\alpha_1 \gamma \alpha_2$ avec $\gamma \in (N \cup T)^*$
  - $A \to \gamma \in R$ (c'est une règle)
- Exemple : $E + E \div E \to E + E * E \div E$
  - $\alpha_1 = E+$
  - $\alpha_2 = \div E$
  - $A = E$
  - $\gamma = E * E$
  - $E \to E * E \in R$

Suite de dérivations

- Par **transitivité**
  - Chaîne de dérivations $\alpha \to \beta \cdots \to \gamma = \alpha \xrightarrow{*} \gamma$
  - Fermeture transitive, clôture (cf étoile de Kleene)
  - Si $\gamma \in (N \cup T)^*$ alors γ est une **proto-phrase** de G
- **Ordre** des dérivations
  - Possibilité d'analyses pour $1 + 2 + 3$
    - Dérivation gauche : réécrit le non-terminal le plus à gauche
      $E \to E + E \to 1 + E \to 1 + E + E \to 1 + 2 + E \to 1 + 2 + 3$
    - Dérivation droite : réécrit le non-terminal le plus à droite
      $E \to E + E \to E + 3 \to E + E + 3 \to E + 2 + 3 \to 1 + 2 + 3$

  $\Rightarrow$ Dérivations différentes ...même résultat ?

  $\Rightarrow$ Pas toujours (par ex. associativité, priorité des opérateurs)

Langage généré

- Soit G une grammaire, alors le langage **généré** par G est

$$L(G) = \{m \in T^* | S \xrightarrow{*} m\}$$

$\Rightarrow$ Sous-ensemble de T^*

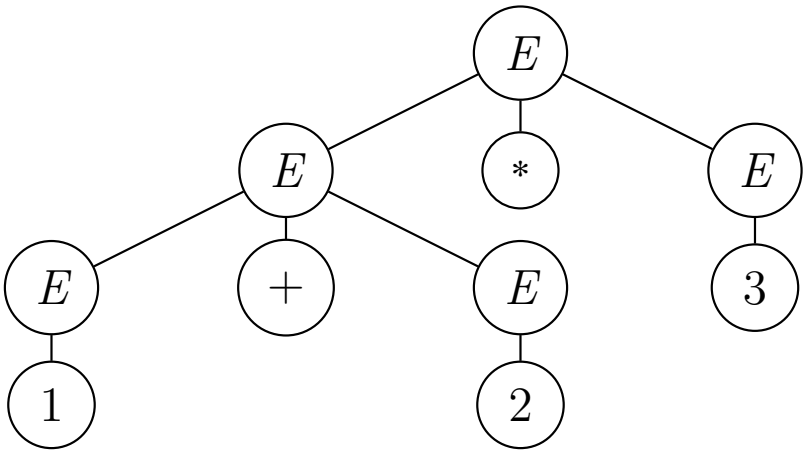
$\Rightarrow$ Pas nécessairement fini

Arbre de dérivation

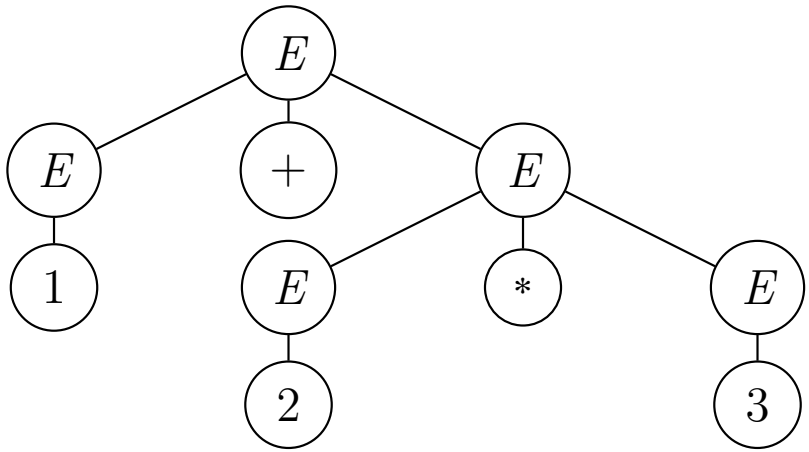
- Représentation graphique de la dérivation
  - **Racine** : symbole initial $= S$
  - **Nœud** : symbole non-terminal $\in N$
  - **Feuille** : symbole terminal $\in T$
  - Relation **parent-enfants** : dérivation (règle)

$\Rightarrow$ Structure de l'analyse

- Dérivations (et analyses) de $1 + 2 * 3$



dérivation gauche



dérivation droite

Plan

Simplifier une grammaire

⇒ Supprimer les éléments **inutiles** de la grammaire

- Symboles **improductifs**
  - A est improductif s'il n'y a pas de $m \in T^*$ tel que $A \xrightarrow{*} m$
- Symboles **inaccessibles**
  - A est inaccessible s'il n'y a pas de α et β tels que $S \xrightarrow{*} \alpha A \beta$
- ϵ-productions
  - Une ϵ-production est une dérivation telle que $A \xrightarrow{*} \epsilon$
- Production simple
  - $A \to B$ est une production simple si $A \in N$ et $B \in N$

⇒ Pour toute grammaire, il existe une grammaire équivalente sans symboles improductifs ni inaccessibles, sans ϵ-productions ni productions simples

Élimination des symboles improductifs

- Calcul des symboles productifs
  - Soit $P_0 = \varnothing$ et $i = 1$
  - Soit $P_1 = \{A \in N, \exists \alpha \in T^*, A \to \alpha \in R\}$
  - Tant que $P_i \neq P_{i-1}$
    - $P_{i+1} = P_i \cup \{A \in N, \exists \alpha \in (T \cup P_i)^*, A \to \alpha \in R\}$
    - $i \leftarrow i + 1$

$\Rightarrow$ Les symboles de $N \backslash P$ sont improductifs

$\Rightarrow$ Enlever ces symboles et les règles dans lesquels ils figurent

Élimination des symboles inaccessibles

- Calcul des symboles accessibles
  - Soit $C_0 = \varnothing$, $C_1 = \{S\}$ et $i = 1$
  - Tant que $C_i \neq C_{i-1}$
    - $C_{i+1} = C_i \cup \{A \in N, \exists \alpha, \beta \in (N \cup T)*, X \in C_i, X \rightarrow \alpha A \beta \in R\}$

$\Rightarrow$ Les symboles de $N \backslash C$ sont inaccessibles

$\Rightarrow$ Enlever ces symboles et les règles dans lesquels ils figurent

Élimination des ϵ-productions

- Calcul des symboles annulables
  - Soit $U_0 = \varnothing$ et $i = 1$
  - Soit $U_1 = \{A \in N, A \to \epsilon \in R\}$
  - Tant que $P_i \neq P_{i-1}$
    - $U_{i+1} = U_i \cup \{A \in N, \exists \alpha \in (U_i)^*, A \to \alpha \in R\}$
    - $i \leftarrow i + 1$

$\Rightarrow$ Les symboles de U sont annulables

- Modification de la grammaire
  - Remplacer les règles $A \to \alpha X \beta$ où $X \in U$ par $A \to \alpha X \beta | \alpha \beta$ (avec combinaisons possibles de X dans les règles)
  - Supprimer toutes les règles $A \to \epsilon$ (sauf pour S)
  - Supprimer toutes les règles $A \to A$

$\Rightarrow$ Grammaire équivalente à ϵ près

Équivalences et productions simples

- Productions simples, dérivations et classes d'équivalences
  - Production simple : toute règle $A \to B$ avec $B \in N$
  - Soit la relation $\geqslant$ telle que $A \geqslant B$ si $A \xrightarrow{*} B$
  - Soit la relation $\approx$ telle que $A \approx B$ si $A \geqslant B$ et $B \geqslant A$
  - **Classes d'équivalences**
    - Si $A \approx B$, tout ce qui est dérivé de A peut l'être de B
    - Relation réflexive, symétrique et transitive
    - L'ensemble des classes est une **partition** de N
- Modification de la grammaire
  - On conserve les productions non-simples
  - Pour chaque classe d'équivalence

    $\Rightarrow$ Choisir un symbole qui remplace tous les autres

  $\Rightarrow$ Pour chaque dérivation $A \xrightarrow{*} B$
    - Pour chaque $B \to \beta$, ajouter $A \to \beta$

Exemple : simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \rightarrow T | U$
  2. $U \rightarrow aYb | V$
  3. $V \rightarrow W$
  4. $X \rightarrow W | a$
  5. $Y \rightarrow Z$
  6. $Z \rightarrow c | \epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs :
  - Symboles accessibles :
  - ϵ-productions :
  - Productions simples :

Exemple : simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \rightarrow T | U$
  2. $U \rightarrow aYb | V$
  3. $V \rightarrow W$
  4. $X \rightarrow W | a$
  5. $Y \rightarrow Z$
  6. $Z \rightarrow c | \epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles :
  - ϵ-productions :
  - Productions simples :

Exemple : simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \to U$
  2. $U \to aYb$
  3.
  4. $X \to a$
  5. $Y \to Z$
  6. $Z \to c|\epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles :
  - ϵ-productions :
  - Productions simples :

Exemple : simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \to U$
  2. $U \to aYb$
  3.
  4. $X \to a$
  5. $Y \to Z$
  6. $Z \to c|\epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions :
  - Productions simples :

Exemple : simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \to U$
  2. $U \to aYb$
  3.
  4.
  5. $Y \to Z$
  6. $Z \to c|\epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions :
  - Productions simples :

Exemple : simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \to U$
  2. $U \to aYb$
  3.
  4.
  5. $Y \to Z$
  6. $Z \to c|\epsilon$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions : $\{Z, Y\} \Rightarrow$ modifier 6, 2
  - Productions simples :

Exemple : simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \to U$
  2. $U \to aYb|ab$
  3.
  4.
  5. $Y \to Z$
  6. $Z \to c$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions : $\{Z, Y\} \Rightarrow$ modifier 6, 2
  - Productions simples :

Exemple : simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \to U$
  2. $U \to aYb|ab$
  3.
  4.
  5. $Y \to Z$
  6. $Z \to c$
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions : $\{Z, Y\} \Rightarrow$ modifier 6, 2
  - Productions simples : $S \to U$ et $Y \to Z \Rightarrow$ modifier 1, 2, 5, 6

Exemple : simplification de grammaire

- Grammaire
  1. $S \to aYb|ab$
  2.
  3.
  4.
  5. $Y \to c$
  6.
- Étapes
  - Symboles productifs : $\{X, Z, Y, U, S\} \Rightarrow$ retirer T, V et W
  - Symboles accessibles : $\{S, U, Y, Z\} \Rightarrow$ retirer X
  - ϵ-productions : $\{Z, Y\} \Rightarrow$ modifier 6, 2
  - Productions simples : $S \to U$ et $Y \to Z \Rightarrow$ modifier 1, 2, 5, 6

Exercice : simplification de grammaire

- Réduire les grammaires suivantes
  - G_1
    - $S \to bSc|bTc|a|\epsilon$
    - $T \to U$
    - $U \to bUc|T$
    - $V \to U|bc$
  - G_2
    - $S \to UXT$
    - $T \to b$
    - $U \to aV|aXTXb$
    - $V \to cV|aWT$
    - $W \to V$
    - $X \to ab|\epsilon$
    - $Y \to cZ$
    - $Z \to aa$

Formes normales

- Forme normale de **Chomsky** : toutes règles de la forme
  - $A \rightarrow BC$ avec $A, B, C \in N$
  - $A \rightarrow a$ avec $a \in T$
- Forme normale de **Greibach** : toutes règles de la forme
  - $A \rightarrow a\alpha$ avec $a \in T, \alpha \in N^*$

$\Rightarrow$ Pour tout langage hors-contexte il existe une grammaire en forme normale de Chomsky et une grammaire en forme normale de Greibach qui le génèrent

Mise sous forme normale de Chomsky

- Étapes
  - Pour chaque terminal a, créeer
    - Un symbole Z_a
    - Une règle $Z_a \to a$
  - Pour chaque règle $A \to \alpha$ où $|\alpha| > 1$
    - Tout terminal a de α est remplacé par Z_a
  - Pour chaque règle $A \to \alpha$ où $|\alpha| > 2$
    - On décompose : $\alpha = A_1, A_2 \dots A_n$
    - On crée les non-terminaux $Y_1, Y_2 \dots Y_{n-2}$
    - On remplace $A \to \alpha$ par
      $A \to A_1\, Y_1$
      $Y_1 \to A_2\, Y_2$
      $\dots$
      $Y_{n-2} \to A_{n-1} A_n$
  - Suppression des ϵ-productions et productions simples

$\Rightarrow$ Forme normale de Chomsky

Récursivité

- Symbole **récursif** : $A \xrightarrow{*} \alpha A \beta$
  - Si $\alpha = \epsilon$, A est récursif à **gauche**
  - Si $\beta = \epsilon$, A est récursif à **droite**
  - Si $\xrightarrow{*}$ ne comporte qu'une dérivation : récursivité **directe**
  - Si $\xrightarrow{*}$ comporte plusieurs dérivations : récursivité **indirecte**

$\Rightarrow$ Une grammaire récursive comporte un symbole récursif

- Exemple : grammaire indirectement récursive à gauche
  - $A \rightarrow B$
  - $B \rightarrow CD$
  - $C \rightarrow AE$
- Suppression de la récursivité directe
  - Remplacer toute règle $A \rightarrow Aa|b$
    - $A \rightarrow bA'$
    - $A' \rightarrow aA'|\epsilon$

Ambiguïté et équivalence

- Ambiguïté de grammaires
  - Grammaire : un mot est généré par deux arbres de dérivation

  ⇒ Exemple : rattachement prépositionnel
    - $S \rightarrow GN\ V\ GN\ PRP\ GN$
    - $S \rightarrow GN\ V\ GN$
    - $GN \rightarrow GN\ PRP\ GN$

    ⇒ *Il voit le chat de sa voisine* (le chat de qui ?)

    ⇒ *Il voit le chat de sa fenêtre* (d'où voit-il ?)
  - Ambiguïté sémantique (plutôt que morpho-syntaxique)
- **Équivalence** de grammaires
  - Génèrent le même langage
  - Donnent les même arbres d'analyse (équivalence forte)

Autre formalismes de grammaires

- Insuffisances des grammaires hors-contexte
  - Accords (flexions / morphologie)
  - Anaphores
  - Portée de la coordination
  - Méthodes statistiques

$\Rightarrow$ Non traitées par les grammaires hors-contexte

- Autres formalismes
  - PCFG (Probabilistic context-free grammar)
  - LFG (Lexical Functional Grammar)
  - HPSG (Head-driven Phrase Structure Grammar)
  - TAG (Tree Adjoining Grammar)
  - CCG (Combinatory Categorial Grammar)
  - Transition-based Parsing
  - ...

Exercices

- Mettre sous forme normale de Chomsky
  - $S \rightarrow AbA$
  - $A \rightarrow AaA|ca$
- Soit l'ensemble de symboles non-terminaux :
  $N = \{GN, GV, DET, PREP, NOM, ADJ, ADV\}$
  - Définissez les règles d'une grammaire qui génère des phrases
  - Ajoutez des éléments terminaux et leurs règles
  - Donnez les arbres de dérivation pour les phrases suivantes
    - *le chat mange*
    - *le chat mange la souris*
    - *le chat regarde le bout de fromage*
  - Donnez quelques phrases générées par la grammaire
  - Quel problème rencontre-t-on pour les genres (m/f) ?
  - Modifiez la grammaire pour les phrases interrogatives

TP : SWI-Prolog

```
:- use_rendering(svgtree, [list(false)]).

% Règles non terminales
s(s(X,Y)) --> gn(X), gv(Y).
gn(X) --> np(X).
gn(gn(X,Y)) --> det(X), nc(Y).
gv(gv(X,Y)) --> v(X), gn(Y).

% Règles terminales
np(np(jean)) --> [jean].
det(det(de)) --> [de].
nc(nc(philosophie)) --> [philosophie].
nc(nc(politique)) --> [politique].
v(v(discute)) --> [discute].

% Requête
phrase(s(Tree), [jean, discute, de, politique]).
```