Logique des propositions

Damien Nouvel

Institut national
des langues
et civilisations orientales

Plan

Notions élémentaires

- Le **monde** de la logique formelle classique
  - Valeurs de **vérité** : vrai, faux
  - Monde **ouvert** (non **clos**)
  - Manipulation de **propositions**
  - ⇒ Pas d'ambigüités (tiers exclu)
  - ⇒ Monde discret (logique non floue)
- Validité d'une proposition
  - **Syntaxique** : est-elle bien formée ?
  - **Sémantique** : a-t-elle du sens ?
- Validité d'un raisonnement
  - **Prémisses** : propositions en condition (antécédent)
  - **Conclusion** : proposition en conséquence
  - ⇒ Est-ce que les prémisses sont **suffisantes** (et **nécessaires**) ?

Quelques exemples

- Raisonnements non valides à divers niveaux
  - **Syntaxe**
    - Aristote mortel est
    - ⇒ Syntaxe de la *prédication*
    - ⇒ Contrainte liée au langage
  - **Sémantique**
    - Tout Socrates est mortel
    - ⇒ Sémantique de la *quantification*
    - ⇒ Contrainte liée au sens des symboles
  - **Raisonnement**
    - Tout chat est mortel
    - **Or** Socrates est mortel
    - **Donc** Socrates est un chat ?!
    - ⇒ Règles d'inférence (déduction)

Formules bien formées

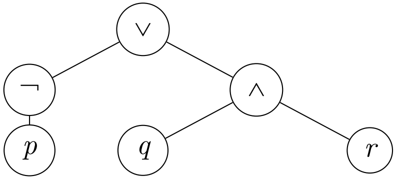
- Langage **formel**
  - **Formules** (dont variables atomiques) : p, q, r ...
  - **Parenthèses** (op. syntaxique) : (et)
  - **Négation** (op. unaire) : $\neg$ (ou !, $\sim$, $\overline{\ }$)
  - Connecteurs logiques (op. binaires)
    - **Conjonction**, et : $\wedge$ (ou ., &)
    - **Disjonction**, ou : $\vee$ (ou +, |)
    - **Implication** : $\rightarrow$
    - **Équivalence** : $\leftrightarrow$
  - **Priorité** (à gauche) des opérateurs : (,), $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Formules **bien formées** (définition récursive)
    - Si p est une f.b.f. alors $\neg pet(p)$ aussi
    - Si p et q sont des f.b.f. alors $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$ et $p \leftrightarrow q$ aussi
    - Les autres formules ne sont **pas** bien formées

$\Rightarrow$ Syntaxe (hors-contexte) des formules logiques

Arbre d'expression

- **Décomposition** d'une formule sous forme d'**arbre**
  - Éléments : **nœuds** (ronds) et **arcs** (traits)
  - Relations entre nœuds : parent, enfant(s), frère(s)
  - Position des nœuds : **racine** (haut) et **feuilles** (bas)

  ⇒ Description de la **structure** de l'expression
    - Nœuds internes : **opérateurs**
    - Feuilles : **atomes**
- Exemple
  - Formule : $\neg p \vee q \wedge r$
  - Équivalente (priorité) à : $(\neg(p) \vee ((q) \wedge (r))$



Assignations

- Association de **valeurs** à des **variables atomiques**
  - Les variables atomiques ne se décomposent pas
  - Valeurs de vérité V, F (ou $1, 0$, $\top, \bot$)
- ⇒ Permet le **calcul** des formules
    - Valeur de vérité pour chaque variable atomique
    - Connecteurs logiques qui les séparent
- Exemple
  - Formule : $\neg p \vee q \wedge r$
  - Assignation : $p = V$, $q = V$ et $r = V$
  - Calcul : $\neg V \vee V \wedge V = F \vee V \wedge V = F \vee V = V$
  - Assignation : $p = V$, $q = F$ et $r = V$
  - Calcul : $\neg V \vee F \wedge V = F \vee F \wedge V = F \vee F = F$
  - Assignation : $p = F$, $q = F$ et $r = F$
  - Calcul : $\neg F \vee F \wedge F = V \vee F \wedge F = V \vee F = V$

⇒ Pour n variables, 2^n assignations possibles

Tables de vérité (assignations)

Négation

p	$\neg p$
V	**F**
F	**V**

Conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Disjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Implication

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Équivalence

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Exercice

- Ajouter les parenthèses, déterminer l'arbre d'expression et la table de vérité pour
  - $p \wedge \neg q$
  - $\neg(p \vee q)$
  - $p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q$
  - $\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$

Problème

- Exprimez les relations entre les éléments suivants
  - Transports :
    $\{bus, metro, tram, rer, voiture, taxi, velo, moto, pied, autolib\}$
  - Motorisation : $\{moteur, pedale, 2roues, 4roues\}$
  - Caractéristiques :
    $\{vehicule, elec, public, proprio, location, payant, gratuit\}$

Plan

Comparaison de formules

⇒ Quelles formules sont équivalentes ?

- **Identiques**
  $p \wedge q \rightarrow r$ et $p \wedge q \rightarrow r$
- **Identiques** aux parenthèses près
  $p \wedge q \rightarrow r$ et $(p \wedge q) \rightarrow r$
- **Identiques** à une commutation près
  $p \wedge q \rightarrow r$ et $q \wedge p \rightarrow r$
- Et autres **propriétés** (associativité, distributivité, etc.)
- Pour **toute assignation**, les formules ont **même valeur**
  $p \wedge q \rightarrow r$ et $\neg(p \wedge q) \vee r$
- ...

⇒ Notation avec $\equiv$

⇒ Méthode pour déterminer l'équivalence ?

⇒ Mettre les expressions sous forme **normale**

Équivalence de formules logiques

Double négation	$\neg\neg p \equiv p$
Idempotence	$p \wedge p \equiv p \vee p \equiv p$
Commutativité	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
	$p \vee q \equiv q \vee p$
Associativité	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$
	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$
Distributivité	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Absorption	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Contradiction	$p \wedge \neg p \equiv F$
Tiers-exclus	$p \vee \neg p \equiv V$
Lois de De Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
Implication	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
Équivalence	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Formes normales

- Système suffisant de connecteurs : $\neg$, $\wedge$, $\vee$
  - **Littéral** : variable atomique ou sa négation (p ou $\neg p$)
  - **Formes normales**
    - Conjonctive (FNC) : conjonction de disjonctions de littéraux $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$
    - Disjonctive (FND) : disjonction de conjonctions de littéraux $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$
  - Mise sous forme normale
    - Suppression des connecteurs $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
    - Réduction des négations (doubles négations, lois De Morgan)
    - Distributivité, commutativité, absorption
- Exemple (FNC)
  - $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

  $\equiv$ $\neg\neg p \vee (q \wedge r)$

  $\equiv$ $p \vee (q \wedge r)$

  $\equiv$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Exercice

- Mettre sous FNC les formules
  - $\neg(p \wedge q)$
  - $(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$
  - $(\neg p \wedge q) \vee r$
  - $p \leftrightarrow q$
  - $\neg(p \vee q) \vee (p \wedge r)$
- Mettre sous FND la formule
  - $p \wedge (p \rightarrow q)$
- Dire si les équivalences suivantes sont justes
  - $(1) p \wedge q \vee r \equiv \neg(p \rightarrow \neg q) \vee r (2)$
  - $(1) \neg(p \vee q \wedge \neg r) \equiv \neg p \wedge \neg q \vee r (2)$

Méthode des mintermes / maxtermes

- Trouver une formule à partir de sa table de vérité
  - Calcul des (min/max)termes pour les formes normales
  - **FND**
    - **Minterme** : conjonction des littéraux qui donnent V
    - Formule comme disjonction des mintermes
  - **FNC**
    - **Maxterme** : disjonction des littéraux qui donnent F
    - Formule comme conjonction des maxtermes
  - Exemple

p	q	formule	(min/max)terme
V	V	**V**	$p \wedge q$
V	F	**V**	$p \wedge \neg q$
F	V	**F**	$\neg p \vee q$
F	F	**V**	$\neg p \wedge \neg q$

    - FND : $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
    - FNC : $(\neg p \vee q)$

Exercice

- Calcul par (min/max)termes de la formule $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \wedge q)$
- Table de vérité

p	q	formule	(min/max)terme
V	V	**F**	$\neg p \vee \neg q$
V	F	**F**	$\neg p \vee q$
F	V	**V**	$\neg p \wedge q$
F	F	**V**	$\neg p \wedge \neg q$

  - FND : $\neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$
  - FNC : $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

Plan

Théorèmes et démonstrations

- **Système logique**
  - **Théorèmes** : ce que l'on peut démontrer
  - Symbole de la **dérivation logique** (démonstration) : $\vdash$
  - Existence d'**axiomes** (théorèmes admis)
  - Utilisation de **règles d'inférence** (prémisses, conclusion)
  - Mécanismes d'**interprétation** des formules

  $\Rightarrow$ Le système est-il **consistant**, **complet** ?
- Exemple de système logique
  - Un **axiome** est un théorème : $\vdash p$
  - **Modus ponens** : $p, p \rightarrow q \vdash q$
  - **Modus tollens** : $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$
- Autre notation $\dfrac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q}$ (modus ponens)

Interprétations et modèles

- **Interprétations**
  - Lien entre **sémantique** et **assignations**
  - ⇒ Une formule peut être
    - **Valide** : vraie quelle que soit l'interprétation (tautologie)
    - **Satisfiable** : au moins une interprétation qui la rend vraie
    - **Contingente** : une interprétation la rend vraie et une autre la rend fausse
    - **Insatisfiable** : aucune interprétation ne la rend vraie
- **Modèles** de formule
  - Interprétations qui rendent la formule vraie

⇒ En calcul des propositions, interprétations dans {V,F}

⇒ Bien plus approfondies en logique des **prédicats** (quantification)

Résolution par réfutation

- Principe de la **réfutation** (**absurde** / apagogie)
  - Démontrer que q est la conséquence logique de $p_1, p_2 \dots p_n$
  - $\equiv$ démontrer que $p_1, p_2 \dots p_n \vdash q$
  - $\equiv$ démontrer que $p_1, p_2 \dots p_n$ *est conséquence logique de* q
  - $\equiv$ démontrer que $\neg(p_1 \wedge p_2 \dots p_n) \vee q$ est *valide*
  - $\equiv$ démontrer que $\neg(\neg(p_1 \wedge p_2 \dots p_n) \vee q)$ est **insatisfiable**
  - $\equiv$ démontrer que $p_1 \wedge p_2 \dots p_n \wedge \neg q$ est **insatisfiable**
- Exemple
  - Axiomes
    - $\vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ (1)
    - $\vdash p \wedge \neg q$ (2)
  - Démonstration que $1, 2 \vdash r$ par réfutation
    - $((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \wedge (p \wedge \neg q) \wedge \neg(r)$
    - $\equiv (\neg p \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
    - $\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
    - $\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge \neg(\neg p \vee q \vee r)$ …(contradiction $A \wedge \neg A$)

Exercice

- Montrer par réfutation
  - $(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash (q \rightarrow p)$
  - $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
  - $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \wedge \neg r \vdash (\neg p \vee \neg q)$
  - $p \vee q \rightarrow r, p \vee s, \neg s \vdash r$

Complétude et cohérence des systèmes logiques

- **Cohérence** (ou consistance)
  - Il n'existe aucune formule telle qu'elle même et sa négation soient conséquences du système
  - ⇒ Programme de Hilbert (Hilbert, 1900)
  - ⇒ Contre-exemple : $p, \neg q, p \rightarrow q$
  - ⇒ Contre-exemple : paradoxe du barbier (Russel, 1903)
- **Complétude**
  - Toute proposition que l'on sait sémantiquement correcte peut être dérivée par le système
  - ⇒ Exemple : calcul des prédicats du 1er ordre (Gödel, 1929)
  - ⇒ Contre-exemple : théorème d'incomplétude (Gödel, 1931)

Plan

Politiquement logique

- Prouvez les assertions suivantes par réfutation
    - « Tout politicien est menteur, tu fais de la politique donc tu ments. »
    - « Tout politicien est menteur, tu ne ments pas, donc tu ne fais pas de politique. »
    - « Je connais un politique qui ne ment pas : tout les politiciens ne sont pas des menteurs ! »
    - « Dans une démocratie, il y a des élections et des libertés. Dans une dictature, il n'y a pas d'élections, ni de liberté. Donc un régime ne peut être à la fois démocratique et dictatorial. »

Cuisine logique

- **Sujet** : un étudiant doit manger la veille d'un examen
- Soient les (assertions) propositions suivantes
  - (1) Je peux me faire des pâtes ou aller chercher une pizza
  - (2) Tous les mardis et jeudis, il y a le camion à pizza
  - (3) Si je mange mal et que je me couche tard je rate l'examen
  - (4) Si je ne révise pas mon cours, je vais rater mon examen
  - (5) Si je révise mon cours, je vais me coucher tard

Cuisine logique (suite)

- Questions
  - Traduire toutes les propositions en logique
  - Donner les arbres d'expression des propositions (2) et (3)
  - Mettre la formule (3) sous forme normale conjonctive
  - Faire la table de vérité du (4), puis sa FNC par minmax
  - Prouver par réfutation que le mercredi, l'étudiant mangera nécessairement des pâtes
  - Prouver que pour réussir l'examen l'étudiant se couchera tard
  - En supposant qu'il ne sait pas cuisiner (les pâtes seront ratées), que mangera l'étudiant si l'on est un jeudi et qu'il veut réussir l'examen ?
  - Que se serait-il passé si l'examen était un lundi ?

Cuisine logique

- Modélisez la composition de repas à l'aide de la logique
  - si le client a commandé un plat du jour, on accompagnera le repas d'une carafe d'eau,
  - si le client a demandé un menu plus conséquent, ou a commandé à la carte, on servira obligatoirement du vin,
  - trois sortes de vins peuvent être servis : du blanc, du rosé ou du rouge,
  - avec de la viande, on servira du vin rouge et du rosé ou du blanc avec le poisson.