Logique des prédicats

Damien Nouvel

Plan

1. Histoire et définitions

2. Manipulation de formules

Propositions vs prédicats

- Avantages et inconvénients la logique des propositions
  - \+ **Formalisation** logique solide
  - \+ Possibilité de **démonstrations**
  - \+ Monde clos
  - \- Pas de **fonctions**
  - \- Pas de **catégories**
  - \- Pas de formules **génériques**
- Exemple
  - Jean est père de Jacques et Alain, Alain est père de Tom.
  - On sait que le père d'un père s'appelle un grand-père.
  - Qui est le grand-père de Tom ?
  - ⇒ Raisonnement logique, évident pour un humain
  - ⇒ Impossible à formuler en logique des propositions !

⇒ Logique des **prédicats** étend la logique des propositions

Quantité et qualité des formules

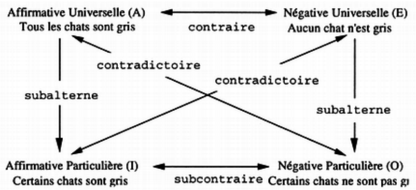
- On peut qualifier les propositions selon
  - Leur **quantité** : **universelle** vs **particulière**
    - **Extension** (ou dénotation)

    ⇒ Ensemble d'**individus** dans le dans le **domaine** du discours

    ⇒ Par ex. : $homme \rightarrow damien \vee pierre \vee paul \vee jacques \ldots$
    - **Compréhension** (ou intention)

    ⇒ Ensemble de caractères

    ⇒ Par ex. : $homme(x) \rightarrow humain(x) \wedge male(x)$
  - Leur **qualité** : **affirmative** ou **négative**



Carré logique (Aristote)

Éléments

- Élements pour la logique des prédicats :
  - Variables et constantes
    - $V = \{X, Y, Z\ldots\}$ et $C = \{a, b, c, pierre, paul, jacques\ldots\}$
  - Négation et connecteurs logiques
    - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - **Prédicats**
    - $p(X)$, $q(X, Z)$, $maries(paul, anne)$, $parent(X, Y)$
    - Application vers les valeurs de vérités
  - Fonctions
    - $f(X)$, $g(X, Y)$, $mari(X)$, $cousin(X, Y)$
    - Application vers le domaine
  - **Quantificateurs**
    - $\forall$ (universel) et $\exists$ (existentiel)
    - Opérateurs unaires sur les variables, ayant une **portée**

$\Rightarrow$ Exemple de formule : $\forall X \exists Y (pere(X) = y \wedge aime(y, x))$

Mécanisme de prédication

- Appliqués à un ou plusieurs **individus**
- Résultat toujours **vrai ou faux**
- Interprétation générale
  - Unaire : **catégorie** (attribut, propriété) d'un individu
  - Binaire : **relation** entre individus
  - Ternaire, quaternaire ...n-aire
- Souvent associée aux **verbes** (*vs* constantes pour les **noms**)
- Modélisation
  - *Félix est un chat* : $chat(felix)$
  - *Paul est président* : $president(paul)$
  - *Paul joue avec Jeanne* : $jouer(paul, jeanne)$
  - *Paul emprunte un livre à Marie* : $emprunt(paul, livre, marie)$

Définitions

- **Termes**
  - Toute variable
  - Toute fonction $f(x, y, z)$ si x, y et z sont des termes
- Formule **atomique**
  - Si p est un prédicat à n arguments et $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont des termes, alors $P(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est une formule atomique
- **Formule bien formée**
  - Si F une formule est atomique elle est bien formée
  - Récursivité : $\neg F$, (F), $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \rightarrow G$, $F \leftrightarrow G$
  - Si Q est un quantificateur, X une variable et F une formule bien formée, alors QXF est bien formée
- **Portée** des quantificateurs
  - Si Q est un quantificateur, X une variable, F une formule bien formée, dans QXF,la portée de QX est F

$\Rightarrow$ Exemple : $p(X) \wedge \exists \underline{X}(P(\underline{X}, Y) \wedge \forall \underline{Y} \neg Q(\underline{X}, \underline{Y}) \vee \neg R(\underline{X}, Y))$

Liaison de variables

- Dans une formule, selon la **portée** des quantificateurs
  - Variable **liée** : si elle est dans la portée d'un quantificateur

  $\Rightarrow$ Exemple : $\forall X p(X)$, $\forall X p(X) \wedge (\exists Y q(X, Y))$
  - Variable **libre** : si elle n'est pas liée

  $\Rightarrow$ Exemple : $p(X)$, $\forall X(p(X) \wedge q(X, Y))$
- Une formule peut être
  - **Close** : toutes les variables sont liées
  - Ouverte : il existe au moins une variable libre

  $\Rightarrow$ Nous travaillons sur les formules closes

Sémantique, domaine et interprétation

- Une **interprétation** I est constituée des éléments suivants
  - **Domaine** D : valeurs que peuvent prendre les constantes
  - Constantes : élément de D
  - Prédicats : application de D^n dans $\{V, F\}$
  - Fonctions : application de D^n dans D

⇒ C'est un **modèle** pour une formule si elle la rend toujours vraie selon le domaine, les constantes, prédicats et fonctions

- Exemple
  - Formule : $\forall X(p(X) \rightarrow q(X, f(X)))$
  - Domaine : $D =]0, +\infty[$
  - Prédicats : $p(X)$ est vrai si $X < 1$, $q(X, Y)$ est vrai si $X > Y$
  - Fonctions : $f(X) = X^2$

  ⇒ Cette interprétation est un modèle pour la formule

  ⇒ Dans un autre domaine plus un modèle : $D = [-1, +1]$

Exercices

- Modélisez selon la logique des prédicats
  - Jacques est le fils de Marie
  - Tout le monde a un père
  - Jean aime tout le monde
  - Jacques n'aime pas tout le monde
  - Personne n'aime Jacques
  - Jean aime Marie mais Marie aime quelqu'un d'autre
  - Jean aime une personne qui ne l'aime pas
  - L'ami de mon ami est mon ami

Plan

Substitution

- **Substitution de variables**
  - Remplacement d'une variable par un terme
  - Pour une formule F remplacer X par λ se note $F[X/\lambda]$

  $\Rightarrow$ Exemple : $\forall X \exists Y p(X, Y)[X/Z] = \forall Z \exists Y p(Z, Y)$

$\Rightarrow$ Utile pour la mise sous forme prénexe et la skolémisation, lorsque deux sous-formules ont les mêmes variables

- L'ordre des quantificateurs peut être modifié
  - $\forall X \forall Y \equiv \forall Y \forall X$
  - $\exists X \exists Y \equiv \exists Y \exists X$
  - Attention : $\forall W \exists Y \not\equiv \exists Y \forall X$
    - $\forall X \exists Y aime(X, Y)$: tout le monde aime quelqu'un
    - $\exists Y \forall X aime(X, Y)$: quelqu'un est aimé de tout le monde

Mise sous forme normale prénexe

- Une formule sous **forme prénexe** s'écrit $Q_1 X_1 Q_2 X_2 \dots Q_n X_n F$
  - $Q_1 \dots Q_n$ sont des quantificateurs
  - $X_1 \dots X_n$ sont des variables
  - F est une formule qui ne contient pas de quantificateur

$\Rightarrow$ Amener tous les quantificateurs en début de formule

- Étapes
  - Supprimer les implications et les équivalences
  - Former des littéraux par transférer des négations
    - $\neg \exists X F \equiv \forall X \neg F$
    - $\neg \forall X F \equiv \exists X \neg F$
  - Substituer les variables pour éviter les conflits
  - Mettre les quantificateurs en tête de formule (G libre de X)
    - $QXF \land G \equiv QX(F \land G)$ et $F \land QXG \equiv QX(F \land G)$
    - $QXF \lor G \equiv QX(F \lor G)$ et $F \lor QXG \equiv QX(F \lor G)$

Exercices

- Mettre sous forme prénexe
  - $\forall X p(X) \vee \neg \forall Y q(Y)$
  - $\exists X p(X) \vee \neg \exists X q(X)$
  - $\forall X p(X) \rightarrow \forall X q(X)$
  - $\forall X \neg (p(X) \wedge \exists Y q(X, Y))$
  - $\exists X (p(X) \wedge \exists Y q(X, Y) \rightarrow \exists Y r(X, Y))$
- Modéliser et mettre sous forme prénexe
  - si tout le monde est riche il n'y aura pas de vols
  - qui sait conduire une voiture sait conduire toutes les voitures

Forme normale de Skolem

⇒ Formule **universelle** : que des quantificateurs universels

- En début de formule, une **constante** satisfait la formule
  - Il existe un homme qui a été président des États-Unis

  $\equiv \exists X homme(X) \wedge president(X, usa)$

  $\equiv homme(billclinton) \wedge president(billclinton, usa)$
- Après quantification universelle, l'individu est une **fonction**
  - Tout président des États-Unis a un vice président

  $\equiv \forall X(president(X, usa) \rightarrow \exists Y vicepresident(Y, X))$

  $\equiv \forall X \exists Y(president(X, usa) \rightarrow vicepresident(Y, X))$

  $\equiv \forall X(president(X, usa) \rightarrow vicepresident(nomination(X), X))$
- La **skolémisation** consiste à remplacer tous les $\exists$ par
  - Des **constantes** sans quantification universelle avant
  - Sinon des **fonctions** des variables quantifiées universellement

Exercices

- Modélisez, mettez sous forme prénexe de skolem conjonctive
  - Il existe une capitale où est construite la Tour Eiffel
  - Tout monument a été conçu par une personne
  - La plus grande ville (d'un pays) est une capitale

Résolution

- **Clause**
  - Disjonction de littéraux
  - Conjonction de clauses : forme normal conjonctive
- Forme **standard**
  - Forme prénexe
  - Forme normale de Skolem
  - Forme normale conjonctive (clausale)

⇒ Conjonction de clauses

- Résolvant de **Robinson** (1965)
  - Si deux clauses F et G sont sous la forme
    - $F = F_1 \vee F_2 \ldots F_i \ldots F_n$
    - $G = G_1 \vee G_2 \ldots G_j \ldots G_n$
  - Et si $F_i \equiv \neg G_j$ alors la clause H résultant de la disjonction de F et G après suppression de F_i et G_j est dite **clause résolvante** de F et G
    - $H =$