

Logique des prédicats

Damien Nouvel



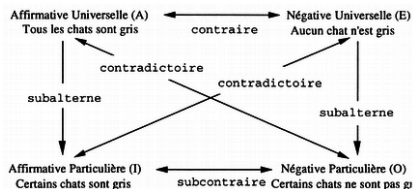
Plan

1. Histoire et définitions
2. Manipulation de formules

Propositions vs prédicats

- ▶ Avantages et inconvénients la logique des propositions
 - + **Formalisation** logique solide
 - + Possibilité de **démonstrations**
 - + Monde clos
 - Pas d'**individus** ni de **catégories**
 - Pas de formules **génériques**
 - Pas de fonctions
 - ▶ Exemple
 - Jean est père de Jacques et Alain, Alain est père de Tom.
 - On sait que le père d'un père s'appelle un grand-père.
 - Qui est le grand-père de Tom ?
 - ⇒ Raisonnement logique, évident pour un humain
 - ⇒ Impossible à formuler en logique des propositions !
- ⇒ Logique des **prédicats**, extension des propositions

Quantité et qualité des formules



Carré logique (Aristote)

- ▶ On peut caractériser les propositions selon
 - Leur **quantité** : **universelle** vs **particulière**
 - ⇒ En corrolaire sur la quantité : définir un **ensemble**
 - **extension** (ou dénotation), liste d'**individus**
 - ⇒ Par ex. : *homme* → *damien* ∨ *pierre* ∨ *paul* ∨ *jacques*...
 - **Intension** ou compréhension, selon ce qui les définit
 - ⇒ Par ex. : *homme*(*x*) → *humain*(*x*) ∧ *male*(*x*)
 - Leur **qualité** : **affirmative** ou **négative**

Éléments

- ▶ Éléments pour la logique des prédicats :
 - Variables et constantes
 - $V = \{X, Y, Z \dots\}$ et $C = \{a, b, c, pierre, paul, jacques \dots\}$
 - Négation et connecteurs logiques
 - $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
 - **Prédicats**
 - $p(X), q(X, Z), maries(paul, anne), parent(X, Y)$
 - Application vers les valeurs de vérités
 - Fonctions
 - $f(X), g(X, Y), mari(X), cousin(X, Y)$
 - Application vers le domaine
 - **Quantificateurs**
 - \forall (universel) et \exists (existantiel)
 - Opérateurs unaires sur les variables, ayant une **portée**

⇒ Exemple de formule : $\forall X, \exists Y, (femme(Y) \wedge mere(X, Y))$

Mécanisme de prédication

- ▶ Appliqués à un ou plusieurs **individus**
- ▶ Résultat toujours **vrai ou faux**
- ▶ Interprétation générale
 - Unaire : **catégorie** (attribut, propriété) d'un individu
 - Binaire : **relation** entre individus
 - Ternaire, quaternaire ...n-aire
- ▶ Souvent associée aux **verbes** (*vs* constantes pour les **noms**)
- ▶ Modélisation
 - *Félix est un chat : chat(felix)*
 - *Paul est grand : grand(paul)*
 - *Paul parle à Jeanne : parler(paul, jeanne)*
 - *Paul emprunte un livre à Marie : emprunt(paul, livre, marie)*

Définitions

▶ Termes

- Toute variable ou constante
- Toute fonction $f(x, y, z)$ avec x, y et z des termes (récursivité)

▶ Formule **atomique** (par récursivité)

- Si p est un prédicat à n arguments et X_1, X_2, \dots, X_n sont des termes, alors $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une formule atomique

▶ Formule **bien formée**

- Si F une formule est atomique elle est bien formée
- Récursivité : $\neg F, (F), F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G$
- Si Q est un quantificateur, X une variable et F une formule bien formée, alors QXF est bien formée

▶ **Portée** des quantificateurs

- Si Q est un quantificateur, X une variable, F une formule bien formée, dans QXF , la portée de QX est F

⇒ Exemple : $p(X) \wedge \exists \underline{X}(P(\underline{X}, Y) \wedge \forall \underline{Y} \neg Q(\underline{X}, \underline{Y}) \vee \neg R(\underline{X}, Y))$

Liaison de variables

- ▶ Dans une formule, selon la **portée** des quantificateurs
 - Variable **liée** : si elle est dans la portée d'un quantificateur
 - ⇒ Exemple : $\forall Xp(X), \forall Xp(X) \wedge (\exists Yq(X, Y))$
 - Variable **libre** : si elle n'est pas liée
 - ⇒ Exemple : $p(X), \forall X(p(X) \wedge q(X, Y))$
- ▶ Une formule peut être
 - **Close** : toutes les variables sont liées
 - **Ouverte** : il existe au moins une variable libre
 - ⇒ Nous travaillons sur les formules closes

Sémantique, domaine, interprétation

- ▶ Une **interprétation** I est constituée des éléments suivants
 - **Domaine** D : valeurs pour les constantes ou variables
 - Constantes : élément de D
 - Prédicats : application de D^n dans $\{V, F\}$
 - Fonctions : application de D^n dans D
- ⇒ Une interprétation est **modèle** d'une formule si elle est valide pour le domaine, les constantes, prédicats et fonctions
- ▶ Exemple
 - Formule : $\forall X(p(X, Y) \wedge p(Y, Z) \rightarrow p(X, Z))$
 - Domaine : $D = \{paul, jean, jacques, leon, claudie\}$
 - Prédicats : $p(X, Y)$ est vrai si X et Y sont cousins
 - Fonctions : pas de fonction
- ⇒ Cette interprétation est un modèle pour la formule

Exercices

- ▶ Modélisez selon la logique des prédicats
 - Jacques est le fils de Marie
 - Tout le monde a un père
 - Jean aime tout le monde
 - Jacques n'aime pas tout le monde
 - Personne n'aime Jacques
 - Jean aime Marie mais Marie aime quelqu'un d'autre
 - Jean aime une personne qui ne l'aime pas
 - L'ami de mon ami est mon ami

Plan

1. Histoire et définitions
2. Manipulation de formules

Substitution

► Substitution de variables

- Remplacement d'une variable par un terme
 - Pour une formule F remplacer X par λ se note $F[X/\lambda]$
- ⇒ Exemple : $\forall X \exists Y p(X, Y)[X/Z] = \forall Z \exists Y p(Z, Y)$

⇒ Utile pour la mise sous forme prénexe et la skolémisation, lorsque deux sous-formules ont les mêmes variables

► L'ordre des quantificateurs peut être modifié

- $\forall X \forall Y \equiv \forall Y \forall X$
- $\exists X \exists Y \equiv \exists Y \exists X$
- Attention : $\forall W \exists Y \not\equiv \exists Y \forall X$
 - $\forall X \exists Y aime(X, Y)$: tout le monde aime quelqu'un
 - $\exists Y \forall X aime(X, Y)$: quelqu'un est aimé de tout le monde

Mise sous forme normale prénexe

- ▶ Une formule sous **forme prénexe** s'écrit

$$Q_1 X_1 Q_2 X_2 \dots Q_n X_n F$$

- $Q_1 \dots Q_n$ sont des quantificateurs
- $X_1 \dots X_n$ sont des variables
- F est une formule qui ne contient pas de quantificateur

⇒ Amener tous les quantificateurs en début de formule

- ▶ Étapes

- Supprimer les implications et les équivalences
- Former des littéraux par transférer des négations
 - $\neg \exists X F \equiv \forall X \neg F$
 - $\neg \forall X F \equiv \exists X \neg F$
- Substituer les variables pour éviter les conflits
- Mettre les quantificateurs en tête de formule (G libre de X)
 - $Q X F \wedge G \equiv Q X (F \wedge G)$ et $F \wedge Q X G \equiv Q X (F \wedge G)$
 - $Q X F \vee G \equiv Q X (F \vee G)$ et $F \vee Q X G \equiv Q X (F \vee G)$

Exercices

- ▶ Mettre sous forme prénexe
 - $\forall X p(X) \vee \neg \forall Y q(Y)$
 - $\exists X p(X) \vee \neg \exists X q(X)$
 - $\forall X p(X) \rightarrow \forall X q(X)$
 - $\forall X \neg (p(X) \wedge \exists Y q(X, Y))$
 - $\exists X (p(X) \wedge \exists Y q(X, Y) \rightarrow \exists Y r(X, Y))$
- ▶ Modéliser et mettre sous forme prénexe
 - si tout le monde est riche il n'y aura pas de vols
 - qui sait conduire une voiture sait conduire toutes les voitures

Forme normale de Skolem

- ▶ Formule **universelle** : que des quantificateurs universels
- ⇒ **Skolémisation** : supprimer les quantificateurs \exists
- ▶ En début de formule, une **constante** satisfait la formule
 - Il existe un homme qui a marché sur la lune
 - ≡ $\exists X \text{homme}(X) \wedge \text{marche}(X, \text{lune})$
 - ⇒ Substitution : $[X/\text{armstrong}]$
 - ≡ $\text{homme}(\text{armstrong}) \wedge \text{marche}(\text{armstrong}, \text{lune})$
- ▶ Après une quantification universelle, l'individu est une **fonction** des variables
 - Tout avion doit être piloté
 - ≡ $\forall X(\text{avion}(X) \rightarrow \exists Y \text{personne}(Y) \wedge \text{pilotage}(Y, X))$
 - ≡ $\forall X \exists Y(\text{avion}(X) \rightarrow \text{personne}(Y) \wedge \text{pilotage}(Y, X))$
 - ⇒ Substitution : $[Y/\text{pilote}(X)]$
 - ≡ $\forall X(\text{avion}(X) \rightarrow \text{personne}(\text{pilote}(X)) \wedge \text{pilotage}(\text{pilote}(X), X))$

Exercices

- ▶ Modélisez, mettez sous forme prénexe de skolem conjonctive
 - Il existe une capitale où est construite la Tour Eiffel
 - Tout monument a été conçu par une personne
 - La plus grande ville (d'un pays) est une capitale

Résolution

- ▶ **Clause** : disjonction de littéraux
- ⇒ Conjonction de clauses : forme normal conjonctive
- ▶ Forme **standard**
 - Forme prénexe
 - Forme normale de Skolem
 - Forme normale conjonctive (clausale)
- ▶ Résolvant de **Robinson** (1965)
 - Si deux clauses F et G sont sous la forme
 - $F = F_1 \vee F_2 \dots F_i \dots F_n$
 - $G = G_1 \vee G_2 \dots G_j \dots G_n$
 - Et si $F_i \equiv \neg G_j$ alors la clause H résultant de la disjonction de F et G après suppression de F_i et G_j est dite **clause résolvente** de F et G
- ⇒ $F_1 \vee F_2 \dots F_{i-1} \vee F_{i+1} \dots F_n \vee G_1 \vee G_2 \dots G_{j-1} \vee G_{j+1} \dots F_n$