

# Logique des prédicats

Damien Nouvel



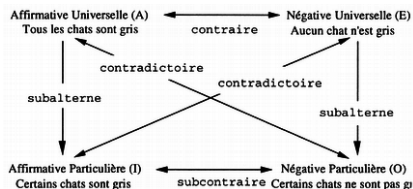
# Plan

1. Histoire et définitions
2. Manipulation de formules

# Propositions vs prédicats

- ▶ Avantages et inconvénients la logique des propositions
    - + **Formalisation** logique solide
    - + Possibilité de **démonstrations**
    - + Monde clos
      - Pas de **catégories**
      - Pas de formules **génériques**
      - Pas de fonctions
  - ▶ Exemple
    - Jean est père de Jacques et Alain, Alain est père de Tom.
    - On sait que le père d'un père s'appelle un grand-père.
    - Qui est le grand-père de Tom ?
    - ⇒ Raisonnement logique, évident pour un humain
    - ⇒ Impossible à formuler en logique des propositions !
- ⇒ Logique des **prédicats**, extension des propositions

# Quantité et qualité des formules



## Carré logique (Aristote)

- ▶ On peut caractériser les propositions selon
  - Leur **qualité** : **affirmative** ou **négative**
  - Leur **quantité** : **universelle** vs **particulière**
  - En corrolaire sur la quantité, définir un **ensemble**
    - **extension** (ou dénotation), liste d'**individus**  
 ⇒ Par ex. : *homme* → *damien* ∨ *pierre* ∨ *paul* ∨ *jacques*...
    - **Intension** ou compréhension, selon ce qui les définit  
 ⇒ Par ex. : *homme*(*x*) → *humain*(*x*) ∧ *male*(*x*)

# Éléments

- ▶ Éléments pour la logique des prédicats :
  - Variables et constantes
    - $V = \{X, Y, Z \dots\}$  et  $C = \{a, b, c, pierre, paul, jacques \dots\}$
  - Négation et connecteurs logiques
    - $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - **Prédicats**
    - $p(X), q(X, Z), maries(paul, anne), parent(X, Y)$
    - Application vers les valeurs de vérités
  - Fonctions
    - $f(X), g(X, Y), mari(X), cousin(X, Y)$
    - Application vers le domaine
  - **Quantificateurs**
    - $\forall$  (universel) et  $\exists$  (existentiel)
    - Opérateurs unaires sur les variables, ayant une **portée**

⇒ Exemple de formule :  $\forall X, \exists Y, (femme(Y) \wedge mere(X, Y))$

# Mécanisme de prédication

- ▶ Appliqués à un ou plusieurs **individus**
- ▶ Résultat toujours **vrai ou faux**
- ▶ Interprétation générale
  - Unaire : **catégorie** (attribut, propriété) d'un individu
  - Binaire : **relation** entre individus
  - Ternaire, quaternaire ...n-aire
- ▶ Souvent associée aux **verbes** (*vs* constantes pour les **noms**)
- ▶ Modélisation
  - *Félix est un chat : chat(felix)*
  - *Paul est grand : grand(paul)*
  - *Paul parle à Jeanne : parler(paul, jeanne)*
  - *Paul emprunte un livre à Marie : emprunt(paul, livre, marie)*

# Définitions

## ▶ Termes

- Toute variable
- Toute fonction  $f(x, y, z)$  si  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des termes

## ▶ Formule **atomique**

- Si  $p$  est un prédicat à  $n$  arguments et  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des termes, alors  $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est une formule atomique

## ▶ Formule **bien formée**

- Si  $F$  une formule est atomique elle est bien formée
- Récursivité :  $\neg F$ ,  $(F)$ ,  $F \wedge G$ ,  $F \vee G$ ,  $F \rightarrow G$ ,  $F \leftrightarrow G$
- Si  $Q$  est un quantificateur,  $X$  une variable et  $F$  une formule bien formée, alors  $QXF$  est bien formée

## ▶ **Portée** des quantificateurs

- Si  $Q$  est un quantificateur,  $X$  une variable,  $F$  une formule bien formée, dans  $QXF$ , la portée de  $QX$  est  $F$

⇒ Exemple :  $p(X) \wedge \exists \underline{X}(P(\underline{X}, Y) \wedge \forall \underline{Y} \neg Q(\underline{X}, \underline{Y}) \vee \neg R(\underline{X}, Y))$

# Liaison de variables

- ▶ Dans une formule, selon la **portée** des quantificateurs
  - Variable **liée** : si elle est dans la portée d'un quantificateur  
⇒ Exemple :  $\forall X p(X)$ ,  $\forall X p(X) \wedge (\exists Y q(X, Y))$
  - Variable **libre** : si elle n'est pas liée  
⇒ Exemple :  $p(X)$ ,  $\forall X (p(X) \wedge q(X, Y))$
- ▶ Une formule peut être
  - **Close** : toutes les variables sont liées
  - **Ouverte** : il existe au moins une variable libre⇒ Nous travaillons sur les formules closes



# Sémantique, domaine et interprétation

- ▶ Une **interprétation**  $I$  est constituée des éléments suivants
  - **Domaine**  $D$  : valeurs que peuvent prendre les constantes
  - Constantes : élément de  $D$
  - Prédicats : application de  $D^n$  dans  $\{V, F\}$
  - Fonctions : application de  $D^n$  dans  $D$
- ⇒ C'est un **modèle** pour une formule si elle la rend toujours vraie selon le domaine, les constantes, prédicats et fonctions
- ▶ Exemple
  - Formule :  $\forall X(p(X) \rightarrow q(X, f(X)))$
  - Domaine :  $D = ]0, +\infty[$
  - Prédicats :  $p(X)$  est vrai si  $X < 1$ ,  $q(X, Y)$  est vrai si  $X > Y$
  - Fonctions :  $f(X) = X^2$
- ⇒ Cette interprétation est un modèle pour la formule
- ⇒ Dans un autre domaine plus un modèle :  $D = [-1, +1]$

# Exercices

- ▶ Modélisez selon la logique des prédicats
  - Jacques est le fils de Marie
  - Tout le monde a un père
  - Jean aime tout le monde
  - Jacques n'aime pas tout le monde
  - Personne n'aime Jacques
  - Jean aime Marie mais Marie aime quelqu'un d'autre
  - Jean aime une personne qui ne l'aime pas
  - L'ami de mon ami est mon ami

# Plan

1. Histoire et définitions
2. Manipulation de formules

# Substitution

## ▸ Substitution de variables

- Remplacement d'une variable par un terme
  - Pour une formule  $F$  remplacer  $X$  par  $\lambda$  se note  $F[X/\lambda]$
- ⇒ Exemple :  $\forall X \exists Y p(X, Y)[X/Z] = \forall Z \exists Y p(Z, Y)$

⇒ Utile pour la mise sous forme prénexe et la skolémisation, lorsque deux sous-formules ont les mêmes variables

## ▸ L'ordre des quantificateurs peut être modifié

- $\forall X \forall Y \equiv \forall Y \forall X$
- $\exists X \exists Y \equiv \exists Y \exists X$
- Attention :  $\forall W \exists Y \not\equiv \exists Y \forall X$ 
  - $\forall X \exists Y aime(X, Y)$  : tout le monde aime quelqu'un
  - $\exists Y \forall X aime(X, Y)$  : quelqu'un est aimé de tout le monde

# Mise sous forme normale prénexe

- ▶ Une formule sous **forme prénexe** s'écrit

$$Q_1 X_1 Q_2 X_2 \dots Q_n X_n F$$

- $Q_1 \dots Q_n$  sont des quantificateurs
- $X_1 \dots X_n$  sont des variables
- $F$  est une formule qui ne contient pas de quantificateur

⇒ Amener tous les quantificateurs en début de formule

- ▶ Étapes

- Supprimer les implications et les équivalences
- Former des littéraux par transférer des négations
  - $\neg \exists X F \equiv \forall X \neg F$
  - $\neg \forall X F \equiv \exists X \neg F$
- Substituer les variables pour éviter les conflits
- Mettre les quantificateurs en tête de formule ( $G$  libre de  $X$ )
  - $Q X F \wedge G \equiv Q X (F \wedge G)$  et  $F \wedge Q X G \equiv Q X (F \wedge G)$
  - $Q X F \vee G \equiv Q X (F \vee G)$  et  $F \vee Q X G \equiv Q X (F \vee G)$

# Exercices

- ▶ Mettre sous forme prénexe
  - $\forall X p(X) \vee \neg \forall Y q(Y)$
  - $\exists X p(X) \vee \neg \exists X q(X)$
  - $\forall X p(X) \rightarrow \forall X q(X)$
  - $\forall X \neg (p(X) \wedge \exists Y q(X, Y))$
  - $\exists X (p(X) \wedge \exists Y q(X, Y) \rightarrow \exists Y r(X, Y))$
- ▶ Modéliser et mettre sous forme prénexe
  - si tout le monde est riche il n'y aura pas de vols
  - qui sait conduire une voiture sait conduire toutes les voitures

# Forme normale de Skolem

- ⇒ Formule **universelle** : que des quantificateurs universels
- ▶ En début de formule, une **constante** satisfait la formule
    - Il existe un homme qui a été président des États-Unis
    - ≡  $\exists X \text{homme}(X) \wedge \text{president}(X, \text{usa})$
    - ≡  $\text{homme}(\text{billclinton}) \wedge \text{president}(\text{billclinton}, \text{usa})$
  - ▶ Après quantification universelle, l'individu est une **fonction**
    - Tout président des États-Unis a un vice président
    - ≡  $\forall X (\text{president}(X, \text{usa}) \rightarrow \exists Y \text{vicepresident}(Y, X))$
    - ≡  $\forall X \exists Y (\text{president}(X, \text{usa}) \rightarrow \text{vicepresident}(Y, X))$
    - ≡  $\forall X (\text{president}(X, \text{usa}) \rightarrow \text{vicepresident}(\text{nomination}(X), X))$
  - ▶ La **skolémisation** consiste à remplacer tous les  $\exists$  par
    - Des **constantes** sans quantification universelle avant
    - Sinon des **fonctions** des variables quantifiées universellement

# Exercices

- ▶ Modélisez, mettez sous forme prénexe de skolem conjonctive
  - Il existe une capitale où est construite la Tour Eiffel
  - Tout monument a été conçu par une personne
  - La plus grande ville (d'un pays) est une capitale



# Résolution

## ▶ Clause

- Disjonction de littéraux
- Conjonction de clauses : forme normal conjonctive

## ▶ Forme **standard**

- Forme prénexe
- Forme normale de Skolem
- Forme normale conjonctive (clausale)

⇒ Conjonction de clauses

## ▶ Résolvant de **Robinson** (1965)

- Si deux clauses  $F$  et  $G$  sont sous la forme
  - $F = F_1 \vee F_2 \dots F_i \dots F_n$
  - $G = G_1 \vee G_2 \dots G_j \dots G_n$
- Et si  $F_i \equiv \neg G_j$  alors la clause  $H$  résultant de la disjonction de  $F$  et  $G$  après suppression de  $F_i$  et  $G_j$  est dite **clause résolvente** de  $F$  et  $G$ 
  - $H =$