

Logique des prédicats

Damien Nouvel



Plan

1. Histoire et définitions
2. Manipulation de formules

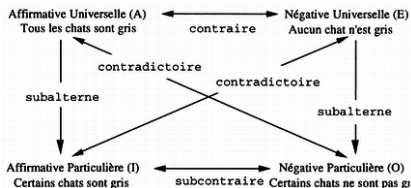
Propositions vs prédicats

- ▶ Avantages et inconvénients la logique des propositions
 - + **Formalisation** logique solide
 - + Possibilité de **démonstrations**
 - + Monde clos
 - Pas de **fonctions**
 - Pas de **catégories**
 - Pas de formules **génériques**
- ▶ Exemple
 - Jean est père de Jacques et Alain, Alain est père de Tom.
 - On sait que le père d'un père s'appelle un grand-père.
 - Qui est le grand-père de Tom ?
 - ⇒ Raisonnement logique, évident pour un humain
 - ⇒ Impossible à formuler en logique des propositions !

⇒ Logique des **prédicats** étend la logique des propositions

Quantité et qualité des formules

- ▶ On peut qualifier les propositions selon
 - Leur **quantité** : **universelle** vs **particulière**
 - **Extension** (ou dénotation)
 - ⇒ Ensemble d'**individus** dans le **domaine** du discours
 - ⇒ Par ex. : *homme* → *damien* ∨ *pierre* ∨ *paul* ∨ *jacques*...
 - **Compréhension** (ou intention)
 - ⇒ Ensemble de caractères
 - ⇒ Par ex. : *homme*(*x*) → *humain*(*x*) ∧ *male*(*x*)
 - Leur **qualité** : **affirmative** ou **négative**



Carré logique (Aristote)

Éléments

- ▶ Éléments pour la logique des prédicats :
 - Variables et constantes
 - $V = \{X, Y, Z \dots\}$ et $C = \{a, b, c, pierre, paul, jacques \dots\}$
 - Négation et connecteurs logiques
 - $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
 - **Prédicats**
 - $p(X), q(X, Z), maries(paul, anne), parent(X, Y)$
 - Application vers les valeurs de vérités
 - Fonctions
 - $f(X), g(X, Y), mari(X), cousin(X, Y)$
 - Application vers le domaine
 - **Quantificateurs**
 - \forall (universel) et \exists (existentiel)
 - Opérateurs unaires sur les variables, ayant une **portée**

⇒ Exemple de formule : $\forall X \exists Y (pere(X) = y \wedge aime(y, x))$

Mécanisme de prédication

- ▶ Appliqués à un ou plusieurs **individus**
- ▶ Résultat toujours **vrai ou faux**
- ▶ Interprétation générale
 - Unaire : **catégorie** (attribut, propriété) d'un individu
 - Binaire : **relation** entre individus
 - Ternaire, quaternaire ...n-aire
- ▶ Souvent associée aux **verbes** (*vs* constantes pour les **noms**)
- ▶ Modélisation
 - *Félix est un chat* : *chat(felix)*
 - *Paul est président* : *president(paul)*
 - *Paul joue avec Jeanne* : *jouer(paul, jeanne)*
 - *Paul emprunte un livre à Marie* : *emprunt(paul, livre, marie)*

Définitions

▸ Termes

- Toute variable
- Toute fonction $f(x, y, z)$ si x , y et z sont des termes

▸ Formule **atomique**

- Si p est un prédicat à n arguments et X_1, X_2, \dots, X_n sont des termes, alors $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une formule atomique

▸ Formule **bien formée**

- Si F une formule est atomique elle est bien formée
- Récursivité : $\neg F$, (F) , $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \rightarrow G$, $F \leftrightarrow G$
- Si Q est un quantificateur, X une variable et F une formule bien formée, alors QXF est bien formée

▸ **Portée** des quantificateurs

- Si Q est un quantificateur, X une variable, F une formule bien formée, dans QXF , la portée de QX est F

⇒ Exemple : $p(X) \wedge \exists X(P(\underline{X}, Y) \wedge \forall Y \neg Q(\underline{X}, \underline{Y}) \vee \neg R(\underline{X}, Y))$

Liaison de variables

- ▶ Dans une formule, selon la **portée** des quantificateurs
 - Variable **liée** : si elle est dans la portée d'un quantificateur
⇒ Exemple : $\forall X p(X)$, $\forall X p(X) \wedge (\exists Y q(X, Y))$
 - Variable **libre** : si elle n'est pas liée
⇒ Exemple : $p(X)$, $\forall X (p(X) \wedge q(X, Y))$
- ▶ Une formule peut être
 - **Close** : toutes les variables sont liées
 - **Ouverte** : il existe au moins une variable libre⇒ Nous travaillons sur les formules closes

Sémantique, domaine et interprétation

- ▶ Une **interprétation** I est constituée des éléments suivants
 - **Domaine** D : valeurs que peuvent prendre les constantes
 - Constantes : élément de D
 - Prédicats : application de D^n dans $\{V, F\}$
 - Fonctions : application de D^n dans D
- ⇒ C'est un **modèle** pour une formule si elle la rend toujours vraie selon le domaine, les constantes, prédicats et fonctions
- ▶ Exemple
 - Formule : $\forall X(p(X) \rightarrow q(X, f(X)))$
 - Domaine : $D =]0, +\infty[$
 - Prédicats : $p(X)$ est vrai si $X < 1$, $q(X, Y)$ est vrai si $X > Y$
 - Fonctions : $f(X) = X^2$
- ⇒ Cette interprétation est un modèle pour la formule
- ⇒ Dans un autre domaine plus un modèle : $D = [-1, +1]$

Exercices

- ▶ Modélisez selon la logique des prédicats
 - Jacques est le fils de Marie
 - Tout le monde a un père
 - Jean aime tout le monde
 - Jacques n'aime pas tout le monde
 - Personne n'aime Jacques
 - Jean aime Marie mais Marie aime quelqu'un d'autre
 - Jean aime une personne qui ne l'aime pas
 - L'ami de mon ami est mon ami

Plan

1. Histoire et définitions
2. Manipulation de formules

Substitution

▸ Substitution de variables

- Remplacement d'une variable par un terme
 - Pour une formule F remplacer X par λ se note $F[X/\lambda]$
- ⇒ Exemple : $\forall X \exists Y p(X, Y)[X/Z] = \forall Z \exists Y p(Z, Y)$

⇒ Utile pour la mise sous forme prénexe et la skolémisation, lorsque deux sous-formules ont les mêmes variables

▸ L'ordre des quantificateurs peut être modifié

- $\forall X \forall Y \equiv \forall Y \forall X$
- $\exists X \exists Y \equiv \exists Y \exists X$
- Attention : $\forall W \exists Y \not\equiv \exists Y \forall X$
 - $\forall X \exists Y aime(X, Y)$: tout le monde aime quelqu'un
 - $\exists Y \forall X aime(X, Y)$: quelqu'un est aimé de tout le monde

Mise sous forme normale prénexe

- ▶ Une formule sous **forme prénexe** s'écrit

$$Q_1 X_1 Q_2 X_2 \dots Q_n X_n F$$

- $Q_1 \dots Q_n$ sont des quantificateurs
- $X_1 \dots X_n$ sont des variables
- F est une formule qui ne contient pas de quantificateur

⇒ Amener tous les quantificateurs en début de formule

- ▶ Étapes

- Supprimer les implications et les équivalences
- Former des littéraux par transférer des négations
 - $\neg \exists X F \equiv \forall X \neg F$
 - $\neg \forall X F \equiv \exists X \neg F$
- Substituer les variables pour éviter les conflits
- Mettre les quantificateurs en tête de formule (G libre de X)
 - $Q X F \wedge G \equiv Q X (F \wedge G)$ et $F \wedge Q X G \equiv Q X (F \wedge G)$
 - $Q X F \vee G \equiv Q X (F \vee G)$ et $F \vee Q X G \equiv Q X (F \vee G)$

Exercices

- ▶ Mettre sous forme prénexe
 - $\forall X p(X) \vee \neg \forall Y q(Y)$
 - $\exists X p(X) \vee \neg \exists X q(X)$
 - $\forall X p(X) \rightarrow \forall X q(X)$
 - $\forall X \neg (p(X) \wedge \exists Y q(X, Y))$
 - $\exists X (p(X) \wedge \exists Y q(X, Y) \rightarrow \exists Y r(X, Y))$
- ▶ Modéliser et mettre sous forme prénexe
 - si tout le monde est riche il n'y aura pas de vols
 - qui sait conduire une voiture sait conduire toutes les voitures

Forme normale de Skolem

- ⇒ Formule **universelle** : que des quantificateurs universels
- ▶ En début de formule, une **constante** satisfait la formule
 - Il existe un homme qui a été président des États-Unis
 - ≡ $\exists X \text{homme}(X) \wedge \text{president}(X, \text{usa})$
 - ≡ $\text{homme}(\text{billclinton}) \wedge \text{president}(\text{billclinton}, \text{usa})$
 - ▶ Après quantification universelle, l'individu est une **fonction**
 - Tout président des États-Unis a un vice président
 - ≡ $\forall X(\text{president}(X, \text{usa}) \rightarrow \exists Y \text{vicepresident}(Y, X))$
 - ≡ $\forall X \exists Y(\text{president}(X, \text{usa}) \rightarrow \text{vicepresident}(Y, X))$
 - ≡ $\forall X(\text{president}(X, \text{usa}) \rightarrow \text{vicepresident}(\text{nomination}(X), X))$
 - ▶ La **skolémisation** consiste à remplacer tous les \exists par
 - Des **constantes** sans quantification universelle avant
 - Sinon des **fonctions** des variables quantifiées universellement

Exercices

- ▶ Modélisez, mettez sous forme prénexe de skolem conjonctive
 - Il existe une capitale où est construite la Tour Eiffel
 - Tout monument a été conçu par une personne
 - La plus grande ville (d'un pays) est une capitale

Résolution

▶ Clause

- Disjonction de littéraux
- Conjonction de clauses : forme normal conjonctive

▶ Forme **standard**

- Forme prénexe
- Forme normale de Skolem
- Forme normale conjonctive (clausale)

⇒ Conjonction de clauses

▶ Résolvant de **Robinson** (1965)

- Si deux clauses F et G sont sous la forme
 - $F = F_1 \vee F_2 \dots F_i \dots F_n$
 - $G = G_1 \vee G_2 \dots G_j \dots G_n$
- Et si $F_i \equiv \neg G_j$ alors la clause H résultant de la disjonction de F et G après suppression de F_i et G_j est dite **clause résolvente** de F et G
 - $H =$