

Logique et algèbre

Damien Nouvel



Plan

1. Théorie des ensembles
2. Dénombrement
3. Applications

De l'algèbre aux ensembles

- ▶ Quelques dates en l'algèbre
 - Mot de l'arabe al-jabr (par Al-Khwarizmi)
 - ⇒ Construction à partir d'**éléments**
 - ~ 1000 : utilisation des chiffres arabes
 - ~ 1500 : apparition des symboles +, -, =
 - ⇒ Chiffres et équations
 - ▶ Vers la théorie des ensembles
 - Fin du XIX^{ème} siècle
 - ⇒ G. Cantor : “nous appelons *ensemble* toute réunion M d'objets de notre conception, déterminés et bien distincts, que nous dénommerons *éléments* de M ”
 - ⇒ Notion d'**élément** et d'**appartenance** $x \in E$
- ⇒ Liens entre la **logique** et l'**algèbre** ?

Ensembles, individus et catégories

- ▶ Relations ensemblistes
 - Relation partie-tout : **méronymie** / **holonomie**
 - La roue est partie d'une voiture
 - La tête est une partie du corps
 - ...
 - ⇒ Relation entre individus
 - Relation hiérarchique : **subsomption**
 - La voiture est un véhicule
 - Le singe est un animal
 - ...
 - ⇒ Relation entre catégories
- ▶ Pour les ensembles
 - Regroupement d'individus dans des catégories
 - Une catégorie peut-être un individu

Notations ensemblistes et principes généraux

► Conventions et symboles

- Majuscules : ensembles ($A, E, P, Q, R \dots$)
 - Minuscules : éléments ($x, y, a, b \dots$)
 - Accolades $\{$ et $\}$ et barre verticale $|$: contenu d'un ensemble
 - \emptyset : ensemble vide (inclus dans tout ensemble)
- $\Rightarrow P = \{x, y\}, P = \{x \mid \exists n, x = 2^n\}$

► Règles générales

- Non-ordonnés : $\{x, y, z\} = \{z, x, y\}$
- Sans répétitions : $\{x, y, y\} = \{x, y\}$
- Peut-être de taille infinie (dénombrable ou non)

► Un ensemble peut être défini par

- **Extension** (dénotation, liste exhaustive) : $P = \{x, y, z\}$
- **Intention** ou **compréhension** : $P = \{x \text{ est pair}\}$
- **Récurrence** ou **induction** : $P = \{x = 1 \text{ ou } x/3 \text{ est dans } P\}$

Symboles et opérateurs

- ▶ Appartenance : $x \in P$ et $x \notin P \equiv \neg(x \in P)$
- ▶ Inclusion : $P \subseteq Q$ (si stricte : $P \subset Q$)
- ▶ Complémentaire : \bar{P}
- ▶ Union : $P \cup Q$
- ▶ Intersection : $P \cap Q$
- ▶ Différence (ensembliste) : $P \setminus Q$
- ▶ Différence symétrique : $P \Delta Q$

Ensembles et sous-ensembles

- ▶ Les **prédicats** définissent des ensembles
 - Cas unaire : l'ensemble des hommes $H = \{x \mid Homme(x) = V\}$
 - Cas n-aire : lien parent-enfant $P = \{(x, y) \mid Enfant(x, y) = V\}$
- ▶ L'**implication** donne les **sous-ensembles**
 - Sous-ensemble $P \subseteq Q$ si $\forall x(x \in P \rightarrow x \in Q)$
 - Sous-ensemble propre $P \subset Q$ si $\forall x(x \in P \rightarrow x \in Q) \wedge P \neq Q$
 - Si $P \subseteq Q$ et $Q \subseteq P$ alors $P = Q$ et $\forall x(x \in P \leftrightarrow x \in Q)$
- ▶ Ensembles **disjoints**
 - Deux ensembles P et Q sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun
 - $\forall x \neg(x \in P \wedge x \in Q) \equiv \neg \exists x(x \in P \wedge x \in Q)$
 - $P \cap Q = \emptyset$

Opérateurs : intersection et union

▶ **Union** \cup de P et Q

- Éléments qui appartiennent soit à P **ou** à Q
- $P \cup Q = \{x | x \in P \vee x \in Q\}$
- $\Rightarrow \{x, y, z\} \cup \{x, z, t\} = \{x, y, z, t\}$
- $\Rightarrow \emptyset$ n'affecte pas l'union : $P \cup \emptyset = P$
- \Rightarrow Associative, commutative, \emptyset neutre

▶ **Intersection** \cap de P et Q

- Éléments qui appartiennent à la fois à P **et** Q
- $P \cap Q = \{x | x \in P \wedge x \in Q\}$
- $\Rightarrow \{x, y, z\} \cap \{x, z, t\} = \{x, z\}$
- \Rightarrow S'il n'y a aucun élément commun : \emptyset
- \Rightarrow Associative, commutative, \emptyset absorbant

- ▶ Union et intersection sont distributifs l'un pour l'autre :
 $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$

Opérateurs : complémentaire et différence

- ▶ **Complémentaire** de P et \bar{P}
 - Tout élément qui n'est **pas** dans P
 - $\bar{P} = \{x | \neg(x \in P)\} = \{x | x \notin P\}$
 - ⇒ Extension pas toujours possible à calculer
 - $\overline{\bar{P}} = P$
- ▶ **Différence** de P et Q
 - Tout élément qui est dans P mais **pas** dans Q
 - $P \setminus Q = \{x | x \in P \wedge x \notin Q\} = P \cap \bar{Q}$
 - ⇒ Non-associative, non-commutative, \emptyset neutre
 - ⇒ Peu pratique, mais correspond à la soustraction
- ▶ **Différence symétrique** de P et Q
 - Tout élément qui est dans P **ou** Q mais **pas** dans P **et** Q
 - $P \Delta Q = \{x | (x \in P \vee x \in Q) \wedge \neg(x \in P \wedge x \in Q)\}$
 - ⇒ Associative, commutative, \emptyset neutre
 - ⇒ La différence symétrique est distributive pour l'intersection

Parties d'un ensemble

▶ Sous-parties d'un ensemble

- L'ensemble des sous-ensembles possibles
- Pour un ensemble P , l'ensemble $\{Q \mid Q \subseteq P\}$
- Exemple : si $P = \{x, y, z\}$ alors

$$\text{Parties}(P) = \{\{x, y, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \emptyset\}$$

▶ Partition d'un ensemble

- Ensemble de sous-ensembles disjoints tels que leur union reforme l'ensemble et que leurs intersections soient vides
- Exemple : si $P = \{x, y, z\}$ alors
 - $\{\{x, y\}, \{z\}\}$
 - $\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$
 - ...

⇒ Combien de sous-parties ou de partitions possibles ?

Ensembles mathématiques

- ▶ \mathbb{N} : nombres entiers naturels (positifs)
- ▶ \mathbb{Z} : nombres entiers (positifs ou négatifs)
- ▶ \mathbb{Q} : nombres rationnels

$$\Rightarrow x \in \mathbb{Q} \leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} (x = y/z)$$

- ▶ \mathbb{R} : nombres réels
- ▶ \mathbb{P} : nombres premiers
- ▶ \mathbb{C} : nombres complexes

$$\Rightarrow \mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- ▶ Intervalles

- $x \in [a, b] \leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a \wedge x \leq b\}$
- $x \in [a, b[\leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a \wedge x < b\}$
- $x \in]-\infty, b] \leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b\}$

Structures ordonnées, les n-uplets

- ▶ Importance de l'ordre des éléments
 - Coordonnées dans un plan : $(1, 2) \neq (2, 1)$
 - Relation parent-enfant : $(Pierre, Jean) \neq (Jean, Pierre)$
 - Attributs d'un objet dans une BDD
- ▶ Composition d'éléments : **n-uplets** (*triplets, quadruplets ...*)
 - **Produit cartésien** d'ensembles : $P \times Q$
 - ⇒ Associatif, non-commutatif
 - **Puissance** : $P^2 = P \times P$, $P^n = P \times P \times P \times \dots \times P$ (n fois)
 - Exemples
 - ⇒ Coordonnée en 3D $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
 - ⇒ Âge et taille de personnes $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$
- ⇒ Les éléments sont des **composantes** de l'objet
- ⇒ Répétitions d'éléments : $(1, 3, 1)$
- ⇒ Sur un domaine \mathbb{D} : prédicats n-aires dans \mathbb{D}^n

Exercices : extension et intension

- ▶ Soient $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, d, e\}$, donnez l'extension de
 - $A \cup B$ et $A \cap B$
 - $A \times B$ et $(A \cap B)^3$
 - $(A \times B) \cap (B \times A)$
 - Les sous-parties possibles et deux partitions de A
- ▶ Donnez l'extension des ensembles suivants
 - $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$
 - $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 < 10\}$
 - $\{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < 2 \wedge 4 * x \in \mathbb{N}\}$
- ▶ Donnez des définitions en intension des ensembles suivants
 - $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 - $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Exercices : démonstrations

- ▶ Soient A et B deux ensembles
 - Démontrez que $A \subseteq A \cup B$
 - Démontrez que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
 - Reformulez $A \setminus B$ par intersection et complémentaire
 - Reformulez $A \Delta B$ par intersection, union et complémentaire
 - Démontrez que $(A \cap B) * C = (A * C) \cap (B * C)$
 - Démontrez que $(A * B) \cap (B * A) = (A \cap B)^2$

Plan

1. Théorie des ensembles
2. Dénombrement
3. Applications

Cardinal d'un ensemble

- ▶ **Cardinal** : nombre d'éléments que contient un ensemble
 - Pour un ensemble P , noté $|P|$
 - Nombre entier positif : $|P| \in \mathbb{N}$
 - Exemples
 - $|\emptyset| = 0$
 - $|\{a, b, c\}| = 3$
 - $|\{a, a, b, c, b, c\}| = 3$
 - $|\{\{a, b\}, \{c\}\}| = 2$
- ▶ Quelques règles
 - Intersection : $|P \cap Q| \leq \min(|P|, |Q|)$
 - Union : $|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q|$
 - Union : $|P \cup Q| \leq |P| + |Q|$
 - Si P et Q sont égaux : $|P \cap Q| = |P \cup Q| = |P| = |Q|$
 - Si P et Q sont disjoints : $|P \cap Q| = 0$ et $|P \cup Q| = |P| + |Q|$

Cardinal de n-uplet

- ▶ Contraintes sur l'ordre et possibilité de répétitions
 - $|P \times Q| = |P| * |Q|$
 - $|P^n| = |P|^n$
 - Par exemple, si $P = \{a, b\}$ alors
 - $P^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$
 - $|P^3| = |P|^3 = 2^3 = 8$
- ⇒ Ordre important $(b, a, a) \neq (a, b, a) \dots$

Algèbre et combinatoire

▶ **Arrangements** sur un ensemble : A_n^k

- Sélection de k élément parmi n
 - Premier élément parmi n
 - Second élément parmi les $n - 1$ restants
 - ...

$$\Rightarrow A_n^k = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

▶ **Permutations** sur un ensemble

- Arrangements possibles de n éléments parmi n : $A_n^n = n!$

▶ **Combinaisons** sur un ensemble : C_n^k (ou $\binom{n}{k}$)

- Sélection de k élément parmi n
- Chaque combinaison, par permutation, $k!$ arrangements

$$\Rightarrow C_n^k * k! = A_n^k$$

$$\Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - k)}{k * (k - 1) * (k - 2) * \dots * 1} = \frac{n!}{k! * (n - k)!}$$

Cardinalités avec/sans ordre et remise

- ▶ Récapitulatif :

k parmi n	avec ordre	sans ordre
avec remise	n^k	$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
sans remise	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Cardinalités de parties d'ensembles

▶ Sous-ensembles possibles par **taille**

- Pour un ensemble de taille n , sous-ensembles

- Pour une taille k , combinaisons : $|\{Q \subset P \wedge |Q| = k\}| = C_n^k$

- Pas d'intersection entre deux tailles :

$$\{Q \subset P \wedge |Q| = k\} \cap \{Q \subset P \wedge |Q| = l \wedge k \neq l\} = \emptyset$$

- Union des tailles : $|\{Q \subset P\}| = \sum_{k=0}^n |\{Q \subset P \wedge |Q| = k\}|$

$$\Rightarrow |\{Q \subset P\}| = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

▶ Sous-ensembles possibles par **présence d'éléments**

- Présence ou absence d'un élément : 2 possibilités
- Pour un ensemble de taille n : 2^n possibilités

$$\Rightarrow \text{En corollaire : } \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

Cardinalités de partitions d'ensembles

- ▶ Pour un ensemble de taille n , partitions de taille k : P_n^k
 - $P_n^1 = P_n^n = 1$
 - $P_n^{n-1} = \frac{n * (n - 1)}{2}$
 - $P_n^2 = 2^{n-1} - 1$
 - Pour un k quelconque
 - Par récurrence : $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + k * P_{n-1}^k$
 - Calcul direct : $P_n^k = \frac{1}{k!} * \sum_{i=1}^k C_i^k (-1)^{k-i} i^n$
- ⇒ Complicé ...

Exercices : dénombrement

- ▶ Soient $P = \{a, b, c\}$ et $Q = \{a, d\}$, donnez
 - $|P|, |Q|, |P \cap Q|, |P \cup Q|$
 - $|\{(x, y) \in Q \times Q\}|$
 - $|P \times Q|$
 - $|P^3|$
 - $|(P \cup Q)^2|$
 - $|(P \cap Q)^7|$
 - $|\{E \subset P, |E| = 2\}|$
 - $|\{E \subset (P^2 \cup Q^2), |E| = 3\}|$
 - $|\{E \subset (P \cup Q)\}|$
- ▶ Alphabet : en tirant 4 lettres d'un sac de 26 (sans remise)
 - Combien de combinaisons de lettres sont possibles ?
 - Combien ne contiennent que des voyelles ou des consonnes ?
 - Pour chaque possibilité, combien de mots peut-on former ?
 - Combien de mots de 4 ou 3 lettres peut-on former ?

Plan

1. Théorie des ensembles
2. Dénombrement
3. Applications

Notations

- ▶ **Application** (fonction) : relation entre deux ensembles
 - **Notation** $f: E \rightarrow F$
 - Ensemble de **départ** E
 - Ensemble d'**arrivée** (ou image) F
 - ⇒ Application est définie par le produit $G \subset E \times F$
 - Fonction mathématique : $(x, y) \in G$ ssi $f(x) = y$
 - ⇒ **Sémantique** portée par le nom de la fonction
- ▶ Une seule **image** possible
 - $\forall x \in E, \forall y_1 \in G, \forall y_2 \in G, ((x, y_1) \in G \wedge (x, y_2) \in G \rightarrow y_1 = y_2)$
 - ⇒ Pour un élément x , on obtient qu'un seul $f(x)$
 - ⇒ Pas de disjonction en sortie de la fonction
- ▶ Exemples
 - $f(x) = x^3 : G = (0, 0), (1, 1), (2, 8), (3, 27), (4, 64) \dots$
 - $f(x, y) = x + 2y + 1 : G = ((0, 0), 1), ((0, 1), 3), ((1, 1), 5) \dots$

Surjection, injection, bijection

- ▶ Caractérisation de G
- ▶ **Antécédent** : si $f(x) = y$ alors $x \in E$ est l'antécédent de y
- ▶ **Surjection**
 - Chaque élément image a **au moins un** antécédent
 - $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$
 - Exemple : valeur absolue sur $[0, +\infty[$
- ▶ **Injection**
 - Chaque élément image a **au plus un** antécédent
 - $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, \forall y \in F, (f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \rightarrow x_1 = x_2)$
 - $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, (f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$
 - $\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, (x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
 - Contre-exemple : racine carrée sur \mathbb{R}

⇒ **Bijection** : application **injective** et **surjective**

Exercice

- ▶ Dites si ces fonctions sont injectives et/ou surjectives
 - $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x + 3$
 - $\mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow]0, 1] : g(x) = 1/x$
 - $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = x + y$
 - $\mathbb{R}^+ \times \{-1, +1\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = x * y$
 - $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f(n) = n^3$

Morphismes

- ▶ **Groupe** : ensemble et **loi de composition associative**
 - Loi de composition : application de $E \times E$ dans E
 - Notation par **opérateur** (infixe), par exemple : $E \bullet E$
 - Associativité : $\forall x, \forall y, \forall z, (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$
 - Exemples : $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}, *)$, mais pas $(\mathbb{R}, -)$, (\mathbb{R}, \div)
- ▶ **Morphisme** : lien entre les groupes de départ et d'arrivée
 - Entre les opérateurs de chaque groupes
 - Notation : $f: (E, \bullet) \rightarrow (F, \diamond)$
 - $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x \bullet y) = f(x) \diamond f(y)$
 - Exemples
 - Objets à attacher (O, att) et leur poids $(\mathbb{R}, +)$
 - Chaînes à concaténer $(\Sigma, .)$ et leur taille $(\mathbb{N}, +)$
 - Taille de chaîne $(\mathbb{N}, +)$ et chaînes possibles $(\mathbb{N}, *)$
 - Contre-exemple : grains de sable $(\mathbb{N}, +)$, hauteur du tas $(\mathbb{N}, +)$

Composition de morphismes

- ▶ Application h : appliquer f , puis g au résultat de f
- ⇒ Composition de fonctions $h(x) = g(f(x))$
- ▶ **Notation** $h = g \circ f$
- ▶ Exemples
 - Somme puis division par N
 - Compression puis taille d'un fichier
 - Résumé puis traduction d'un texte

Types de morphismes

- ▶ **Homomorphisme** : morphisme
- ▶ **Endomorphisme**
 - Mêmes groupes de départ et d'arrivée
 - Exemple : $f(x) = |x|$ (valeur absolue) dans $(\mathbb{R}, *)$
 - Possibilité de composition de morphismes $f \circ g$
- ▶ **Isomorphisme** (homéomorphisme, difféomorphisme)
 - Morphisme $f: E \rightarrow F$ qui admet un inverse $g: F \rightarrow E$
 - ⇒ Composition : $f \circ g = Id_E$ et $g \circ f = Id_F$
 - ⇒ Pour les ensembles : applications **bijectives**
 - Exemple : entiers
 $f: (\mathbb{N} \setminus \{0\} \times \{+1, -1\}, *) \rightarrow (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, *), f(x, y) = x * y$
- ▶ **Automorphisme** : endomorphisme et isomorphisme
 - Exemple : exponentielle $f: (\mathbb{R}, *) \rightarrow (\mathbb{R}, +), f(x) = e^x$

Relations

- ▶ Relation \mathcal{R} **binaire** sur un ensemble E
 - Sous-ensemble du produit cartésien : $\mathcal{R} \subset E \times E$
 - **Propriétés** possibles
 - **Réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
 - Irréflexive : $\forall x \in E, \neg x\mathcal{R}x$
 - **Symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \rightarrow y\mathcal{R}x)$
 - **Anti-symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \rightarrow x = y)$
 - **Transitive** : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z)$
 - Circulaire : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow z\mathcal{R}x)$
 - Exemples
 - $=$ sur \mathbb{N} : réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive
 - \leq sur \mathbb{N} : réflexive, anti-symétrique, transitive
 - $<$ sur \mathbb{N} : irréflexive, transitive
 - *diviseur* sur \mathbb{N} : réflexive, anti-symétrique, transitive
 - *ancetre* sur personnes : irréflexive, transitive

Relations d'ordre

- ⇒ Les relations peuvent **ordonner** les éléments d'un ensemble
- ▶ Types d'ordres
 - **Pré-ordre** : relation **réflexive** et **transitive**
 - **Équivalence** : pré-ordre symétrique
 - **Ordre** : relation **réflexive**, **anti-symétrique** et **transitive**
 - Ordre **Partiel** ou **treillis**
 - **Arbre** : $\forall (x, y, z) \in E^3, x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z \wedge x \neq y \neq z \rightarrow y\mathcal{R}z \vee z\mathcal{R}y$
 - Ordre **Total** : $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \rightarrow x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$
 - ⇒ Les éléments deux-à-deux sont toujours en relation
 - ▶ Exemples
 - *diviseur* sur \mathbb{N} : pré-ordre
 - *dizaine, cousinade* : équivalence
 - *inclusion, sous-chaîne* : ordre partiel
 - \leq sur \mathbb{N} : ordre total
 - Ordre alphabétique / lexicographique : ordre total

Exercices : morphismes et relations

► Morphisme par concaténation

- Soit L un langage basé sur un alphabet Σ de 26 lettres (a ...z)
- L'application de concaténation $c()$ (telle que $c(ab, cd) = abcd$) est-elle surjective? Quelle contrainte faudrait-il ajouter pour qu'elle soit injective?
- L'application $t(\alpha)$ qui compte le nombre de caractères d'une chaîne est-elle injective, surjective?
- Nous transformons la concaténation comme opérateur “.” (point, tel que $ab.cd = abcd$)
 - Est-il associatif? Commutatif?
 - Pour quels opérateurs t est un morphisme de L dans \mathbb{N} ?
- On définit la relation *sub* sur ce langage par le principe de sous-chaîne : $\alpha \text{ sub } \beta \leftrightarrow \exists \gamma, \delta \in L^2, \alpha = \gamma.\beta.\delta$
 - Quelles sont les propriétés de l'ordre ainsi défini?
 - Quelle est le type de cet ordre?
 - Dessinez le treillis pour $\Sigma = \{a, b\}$ et $\{\alpha \in L, t(\alpha) \leq 3\}$