

# Théorie de l'information et mesures d'entropie

Damien Nouvel



# Plan

1. Quantification de données
2. Calculs d'entropie
3. Arbres de décision

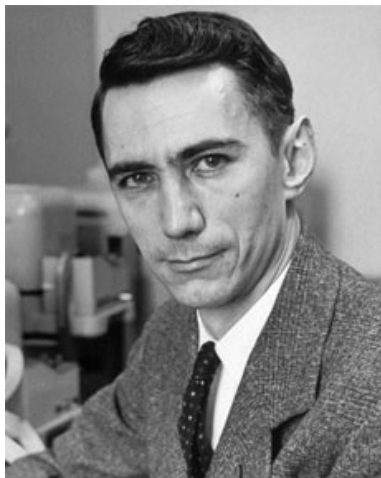
# Mesures sur des corpus

- ▶ **Taille** pour stocker un corpus :
  - Nombre de fichiers (80jours : 1)
  - Nombre de mots (80jours : 85K)
  - Espace disque requis (80jours : 776Ko)
 ⇒ Quelles mesures pour l' « information » ?
- ▶ **Information** contenue dans un corpus :
  - Compression de fichier (80jours : zip 192 Ko, bz2 117 Ko...)
  - Nombre de mots distincts (80jours : 9412)
  - ... ?
 ⇒ Nombreuses **mesures** pour **quantifier** un corpus
- ▶ Lien entre taille et **information** :
  - Comment stocker un document de manière optimale ?
  - Combien de temps pour **lire et comprendre** un texte ?
 ⇒ Compromis entre **stockage** et **accessibilité**

# Plan

1. Quantification de données
2. Calculs d'entropie
3. Arbres de décision

# Théorie de l'information de Shannon



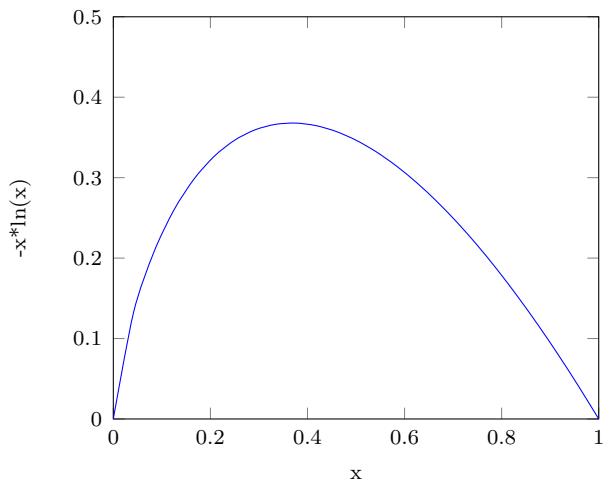
- ▶ **Claude Shannon** : entropie, théorie de l'information

(1918)

# Entropie de Shannon

- ▶ Mesure **thermodynamique** adaptée aux **télécoms**
- ▶ Répandue en sciences (néguentropie)
- ▶ **Définition** :
  - Formule :  $H(X) = - \sum_{x \in X} P(X = x) * \log(P(X = x))$
- ▶ **Propriétés** :
  - **Positive** :  $H(X) \geq 0$
  - Entropie **jointe** :  $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$
  - Entropie **conditionnelle** :  $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$
- ▶ **Comportement** :
  - **Augmente** avec le **nombre** d'évènements équiprobables :
    - Deux évènements ( $P(X = i) = 0.5$ ) :  $H(X) = 1$
    - Quatre évènements ( $P(X = i) = 0.25$ ) :  $H(X) = 2$
  - **Augmente** avec l'**équilibre** des probabilités :
    - Déséquilibrée ( $P(X = 1) = 0.1, P(X = 2) = 0.9$ ) :  $H(X) = 0.47$
    - Équilibrée ( $P(X = 1) = 0.4, P(X = 2) = 0.6$ ) :  $H(X) = 0.97$

# Fonction d'entropie



# Interprétation de l'entropie

⇒ L'entropie comme **mesure** de...

- Incertitude...
- Indécidabilité ?!
- Désorganisation #§! :/
- Chaos :s
- Information ?

⇒ difficile à interpréter...

▶ Intérêt de l'entropie

• Mesure la **quantité** d'information :

- Un signal peu informatif est **redondant**
- Un signal informatif est très **diversifié** et **peu prédictible**

⇒ En télécommunications : quelle bande passante est nécessaire ?

⇒ Relation entre **données** et **modèle statistique**

▶ Se mesure en nombre de **bits** (logarithme base 2)



# Calcul de l'entropie en python

⇒ Utilisation de la fonction `log` de la librairie `math`

```
import math
probas = [0.2, 0.3, 0.5]
entropie = 0
for proba in probas:
    entropie -= proba*math.log(proba, 2)
print 'Entropie:', entropie
```

# Information mutuelle

⇒ Mesure de la **corrélation** entre deux variables

▶ **Définition** :

- Formule :  $I(X, Y) = \sum_{x \in X, y \in Y} P(X = x, Y =$

$$y) * \log \left( \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x) * P(Y = y)} \right)$$

▶ **Propriétés** :

- **Positive** :  $I(X, Y) \geq 0$
- En cas d'indépendance :  $I(X, Y) = 0$
- Lien avec l'entropie :  $H(X, Y) = H(X) + H(Y) + I(X, Y)$
- Lien avec l'entropie conditionnelle :  $I(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$

# Divergence de Kullback-Leibler

⇒ Mesure la perte d'information par **approximation** d'une loi

▶ **Définition** :

- Formule : 
$$D_{KL}(P||Q) = \sum_{x \in X} P(X = x) * \log \left( \frac{P(X = x)}{Q(X = x)} \right)$$

▶ **Propriétés** :

- **Positive** :  $D_{KL}(P, Q) \geq 0$
- Les lois ne divergent pas si  $D_{KL}(P||Q) = 0$
- Avec cette formulation, comparaison sur les **mêmes données**

⇒ Aussi appelée **gain d'information** ou **entropie relative**

# Plan

1. Quantification de données
2. Calculs d'entropie
3. Arbres de décision

# Critères sur des données

- ▶ Tâche de **classification** :
  - Recueil et examen des **données**
  - Recherche de **critères** « utiles »
  - Focalisation sur les **sous-ensembles** de données

⇒ Quelle importance accorder à chaque **critère**

⇒ Prise de décision

<i>jour</i>	<i>température</i>	<i>pluie</i>	<i>travail</i>	<b>sortir</b>
lundi	27	non	oui	oui
jeudi	15	oui	non	non
samedi	10	oui	non	non
mercredi	23	non	oui	non
lundi	27	non	non	oui
mercredi	15	oui	non	oui

# Critères sur des données

- ⇒ **L'arbre de décision** évalue les critères pour **classifier**
- ▶ Structure de l'arbre :
    - Les nœuds contiennent les variables
    - Les arcs contiennent une décision sur les valeurs
    - Les feuilles contiennent les données
  - ▶ Évaluation de l'apport d'une décision par **entropie** :
    - Pour chaque **feuille**, pour chaque **critère** différence entre :
      - Entropie du nœud  $n$ 

$$- \sum_{x \in X} P(X = x|n) * \log(P(X = x|n))$$
      - Somme pondérée des entropie des nœuds enfants  $e \in child(n)$ 

$$- \sum_{e \in enfant(n)} \frac{|e|}{|n|} \sum_{x \in X} P(X = x|e) * \log(P(X = x|e))$$
- ⇒ Choix du critère qui **diminue le plus l'entropie**
- ⇒ Séquence de **décisions** guidées par l'**entropie**
- ⇒ Possibilité de visualiser les décisions sous forme d'**arbre**

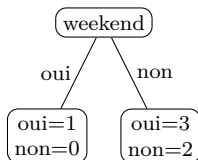
## Exemple

<i>weekend</i>	<i>temp.</i>	<i>pluie</i>	<i>travail</i>	<b>sortir</b>
non	chaud	non	oui	oui
non	froid	oui	non	non
oui	froid	oui	oui	oui
non	chaud	non	oui	non
non	chaud	oui	non	oui
non	doux	oui	non	oui

$$\begin{aligned}
 H(\text{sortir}) &= -4/6 * \log(4/6) - 2/6 * \log(2/6) \\
 &= 0.91
 \end{aligned}$$

## Exemple

<i>weekend</i>	<i>temp.</i>	<i>pluie</i>	<i>travail</i>	<b>sortir</b>
non	chaud	non	oui	oui
non	froid	oui	non	non
oui	froid	oui	oui	oui
non	chaud	non	oui	non
non	chaud	oui	non	oui
non	doux	oui	non	oui

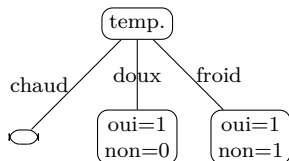


$$\begin{aligned}
 H(\text{sortir}) &= 1/6 * (-1 * \log(1)) \\
 &+ 5/6 * (-3/5 * \log(3/5) - 2/5 * \log(2/5)) \\
 &= 0.80
 \end{aligned}$$



## Exemple

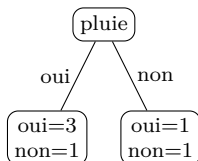
<i>weekend</i>	<i>temp.</i>	<i>pluie</i>	<i>travail</i>	<b>sortir</b>
non	chaud	non	oui	oui
non	froid	oui	non	non
oui	froid	oui	oui	oui
non	chaud	non	oui	non
non	chaud	oui	non	oui
non	doux	oui	non	oui



$$\begin{aligned}
 H(\text{sortir}) &= 3/6 * (-2/3 * \log(2/3) - 1/3 * \log(1/3)) \\
 &+ 1/6 * (-1 * \log(1)) \\
 &+ 2/6 * (-1/2 * \log(1/2) - 1/2 * \log(1/2)) \\
 &= 0.79
 \end{aligned}$$

## Exemple

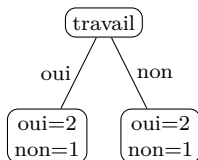
<i>weekend</i>	<i>temp.</i>	<i>pluie</i>	<i>travail</i>	<b>sortir</b>
non	chaud	non	oui	oui
non	froid	oui	non	non
oui	froid	oui	oui	oui
non	chaud	non	oui	non
non	chaud	oui	non	oui
non	doux	oui	non	oui



$$\begin{aligned}
 H(\text{sortir}) &= 4/6 * (-3/4 * \log(3/4) - 1/4 * \log(1/4)) \\
 &+ 2/6 * (-1/2 * \log(1/2) - 1/2 * \log(1/2)) \\
 &= 0.87
 \end{aligned}$$

## Exemple

<i>weekend</i>	<i>temp.</i>	<i>pluie</i>	<i>travail</i>	<b>sortir</b>
non	chaud	non	oui	oui
non	froid	oui	non	non
oui	froid	oui	oui	oui
non	chaud	non	oui	non
non	chaud	oui	non	oui
non	doux	oui	non	oui

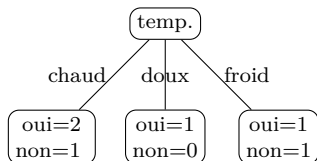


$$H(\text{sortir})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{6} * (-\frac{2}{3} * \log(\frac{2}{3}) - \frac{1}{3} * \log(\frac{1}{3})) \\
 &+ \frac{3}{6} * (-\frac{2}{3} * \log(\frac{2}{3}) - \frac{1}{3} * \log(\frac{1}{3})) \\
 &= 0.91
 \end{aligned}$$

## Exemple

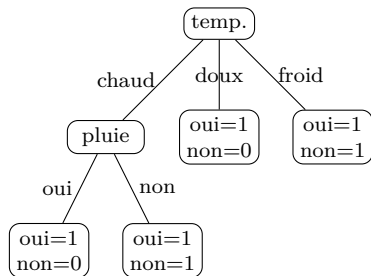
<i>weekend</i>	<i>temp.</i>	<i>pluie</i>	<i>travail</i>	<b>sortir</b>
non	chaud	non	oui	oui
non	froid	oui	non	non
oui	froid	oui	oui	oui
non	chaud	non	oui	non
non	chaud	oui	non	oui
non	doux	oui	non	oui



$$\begin{aligned}
 H(\text{sortir} | \text{temp} = \text{chaud}) \\
 &= -2/3 * \log(2/3) - 1/3 * \log(1/3) \\
 &= 0.63
 \end{aligned}$$

## Exemple

<i>weekend</i>	<i>temp.</i>	<i>pluie</i>	<i>travail</i>	<b>sortir</b>
non	chaud	non	oui	oui
non	froid	oui	non	non
oui	froid	oui	oui	oui
non	chaud	non	oui	non
non	chaud	oui	non	oui
non	doux	oui	non	oui



$$\begin{aligned}
 &H(\text{sortir} | \text{temp} = \text{chaud}) \\
 &= 2/3 * (-1 * \log(1)) \\
 &+ 1/3 * (-1/2 * \log(1/2) - 1/2 * \log(1/2)) \\
 &= 0.46
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &H(\text{sortir}) \\
 &= 3/6 * H(\text{sortir} | \text{temp} = \text{chaud}) \\
 &+ 1/6 * (-1 * \log(1)) \\
 &+ 2/6 * (-1/2 * \log(1/2) - 1/2 * \log(1/2)) \\
 &= 0.46
 \end{aligned}$$