

Logique des propositions et des prédicats

Algèbre et bases de données

Damien Nouvel

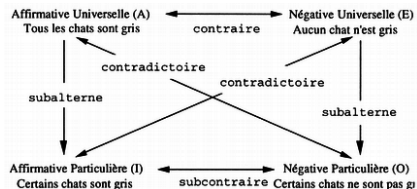
Inalco

La logique de l'antiquité

Raisonnements logiques

- *lógos*: raison, langage
- dans l'antiquité, validité des **argumentations**
- **syllogismes** (Aristote, Organon, -350)
 - prémisses : deux propositions
 - tous les hommes sont mortels
 - Socrates est un homme
 - conclusion : une proposition
 - Socrates est mortel

Caractérisation des propositions



Carré logique d'Aristote

La logique moderne

Formalisation du calcul logique au XIX^{ème}

- calcul de **valeurs de vérité**
- deux valeurs : **vrai** ou **faux** (binaire, tiers-exclu)
- écriture de **propositions**
- principe **déterministe** (démonstrations, inférences)

Raisonnement dans un monde **clos**

- propositions vraies ou fausses universellement
- pas de temporalité
- pas de modalité (possibilité, nécessité, etc.)

Écriture de la logique des propositions

Écriture de **propositions** (affirmations)

- simplification de la langue naturelle
- utilisation d'**opérateurs** (calcul logique)

Construction de **formules**

- propositions **atomiques**
 - « il fait chaud » : *chaud* (chaud est vrai)
- **négation** (non) : $\neg$
 - « il ne fait pas chaud » : $\neg \textit{chaud}$
- **conjonction** (et) : $\wedge$
 - « il fait beau et chaud » : $\textit{beau} \wedge \textit{chaud}$
- **disjonction** (ou) : $\vee$
 - « il fait chaud ou beau » : $\textit{chaud} \vee \textit{beau}$
- **implication** : $\rightarrow$
 - « s'il fait beau, je sors » : $\textit{beau} \rightarrow \textit{sortir}$
- **équivalence** : $\leftrightarrow$
 - « sortir est comme être dehors » : $\textit{sortir} \leftrightarrow \textit{dehors}$

Tables de vérité des opérateurs

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propositions logique complexes

Une formule est **bien formée** si elle est

- atomique
- construite par opérateurs combinant des formules bien formées

Priorité des opérateurs

- calcul selon l'ordre des priorités : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- expressions mathématiques
 - priorité: $5 + 3 * 2 = 5 + (3 * 2)$
 - pour les opérateurs, sauf $\rightarrow$, commutativité : $5 + 3 + 2 = 2 + 3 + 5$
 - entre opérateurs, distributivité : $5 * (3 + 2) = 5 * 3 + 5 * 2$

Exemples

- « s'il fait chaud, je sors ou je dors » :
 $chaud \rightarrow sortir \vee dormir$
- « s'il fait froid ou si c'est la nuit, je ne sors pas » :
 $froid \vee nuit \rightarrow \neg sortir$

Traduction d'énoncés en formules logiques

« il fait chaud et j'ai soif »

$chaud \wedge soif$

« s'il fait chaud je prends une casquette »

$chaud \rightarrow casquette$

« on ne sort pas la nuit »

$nuit \rightarrow \neg sortir$

« la chaleur donne soif et envie de dormir »

$chaud \rightarrow soif \wedge sommeil$

« la chaleur donne soif et le froid fait grelotter »

$(chaud \rightarrow soif) \wedge (froid \rightarrow grelotter)$

« il est impossible qu'il fasse chaud et froid en même temps »

$\neg(chaud \wedge froid)$

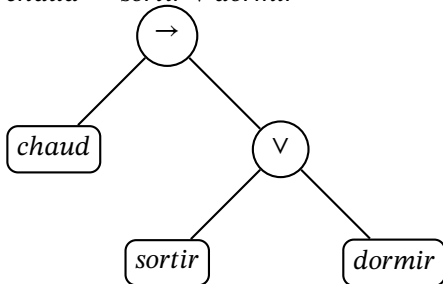
Arbres d'expression

Représentation graphique des formules logiques

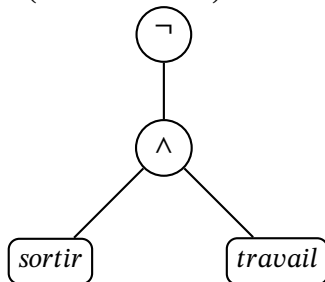
- utilisation de **nœuds** et d'**arcs** (graphes)
- nœuds selon
 - priorité des opérateurs (puis de gauche à droite)
 - ordre d'apparition dans la formule
- pas de représentation des parenthèses

Exemples

$chaud \rightarrow sortir \vee dormir$



$\neg(sortir \wedge travail)$



Tables de vérité

Principe général

- **véracité** d'une formule selon une assignation des atomes
- chaque atome peut être vrai ou faux
- pour n atomes, 2^n possibilités (combinaisons)

Exemple

p	q	r	$p \wedge (\neg q \vee r)$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Manipulation de formules logiques

Avec vrai et faux

- $p \wedge \text{faux} \equiv \text{faux}$
- $p \vee \text{faux} \equiv p$
- $p \wedge \text{vrai} \equiv p$
- $p \vee \text{vrai} \equiv \text{vrai}$

Lois atomiques

- $p \wedge p \equiv p \vee p \equiv p$
- $p \wedge \neg p \equiv \text{faux}$
- $p \vee \neg p \equiv \text{vrai}$
- $\neg \neg p \equiv p$

Commutativité

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- $p \vee q \equiv q \vee p$

Associativité

- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r$
- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$

Distributivité

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Lois de Morgan

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Absorption

- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Ré-écriture d'opérateurs

- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Exemple de réécriture de formule logique

« Il ne fait pas beau et chaud »

$$\neg(\text{beau} \wedge \text{chaud})$$

$$\equiv \neg\text{beau} \vee \neg\text{chaud}$$

« S'il fait chaud ou que je n'ai pas de travail, je fais la sieste »

$$\text{chaud} \vee \neg\text{travail} \rightarrow \text{sieste}$$

$$\equiv \neg(\text{chaud} \vee \neg\text{travail}) \vee \text{sieste}$$

$$\equiv (\neg\text{chaud} \wedge \neg\neg\text{travail}) \vee \text{sieste}$$

$$\equiv (\neg\text{chaud} \wedge \text{travail}) \vee \text{sieste}$$

$$\equiv (\neg\text{chaud} \vee \text{sieste}) \wedge (\text{travail} \vee \text{sieste})$$

Logique des prédicats

La logique des propositions est **universelle** (pas d'**individus**)

Extension des formules à la **logique des prédicats**

- prises en compte des individus
 - **constantes** : Paul, Pierre, Humain42, etc.
 - **variables** libres ou liées : X, Y, Z
- **prédicats** comme fonctions qui donnent une valeur de vérité
- symboles **quantificateurs** pour les variables
 - **universel** : symbole $\forall$ avant la variable
 - **existentiel** : symbole $\exists$ avant la variable

Exemples

- « Tous les humains sont mortels »
 $\forall X(\text{Humain}(X) \rightarrow \text{Mortel}(X))$
- « Il existe un humain qui s'appelle Socrates »
 $\exists X(\text{Humain}(X) \wedge \text{Nom}(X, \text{Socrates}))$

Formules avec prédicats et quantificateurs

Formules avec prédicats

- mêmes **opérateurs** que la logique des propositions
- les **atomes** sont remplacés par les prédicats
- **nécessité** de quantifier les variables (liées)

Importance de l'**ordre** des quantificateurs

- « Tout le monde aime quelqu'un »
 $\forall X \exists Y Aime(X, Y)$
- « Quelqu'un est aimé par tout le monde »
 $\exists Y \forall X Aime(X, Y)$
- « Quelqu'un aime tout le monde »
 $\exists X \forall Y Aime(X, Y)$
- « Tout le monde est aimé par quelqu'un »
 $\forall Y \exists X Aime(X, Y)$

Manipulation de formules de logique des prédicats

Liens entre les variables d'une formule

- « Toute planète tourne autour d'un soleil »
 $\forall X(Planete(X) \rightarrow \exists Y(Soleil(Y) \wedge TourneAutour(X, Y)))$

On peut faire la **négation d'un quantificateur**

- « Il n'est pas vrai que tout le monde est riche »
 $\neg \forall X Riche(X)$
 $\equiv \exists X \neg Riche(X)$
 $\equiv$ « Il existe des personnes pas riches »
- « Il n'est pas vrai qu'il existe un immortel »
 $\neg \exists X Immortel(X)$
 $\equiv \forall X \neg Immortel(X)$
 $\equiv$ « Tout le monde n'est pas immortel »