Logique des propositions

Damien Nouvel

Institut national des langues et civilisations orientales

Plan

Notions élémentaires

- Le **monde** de la logique formelle classique
    - Valeurs de **vérité** : vrai, faux
    - Monde **ouvert** (non **clos**)
    - Manipulation de **propositions**
    - ⇒ Pas d'ambigüités (tiers exclu)
    - ⇒ Monde discret (logique non floue)
- Validité d'une proposition
    - **Syntaxique** : est-elle bien formée ?
    - **Sémantique** : a-t-elle du sens ?
- Validité d'un raisonnement
    - **Prémisses** : propositions en condition (antécédent)
    - **Conclusion** : proposition en conséquence
    - ⇒ Est-ce que les prémisses sont **suffisantes** (et **nécessaires**) ?

Quelques exemples

- Raisonnements non valides à divers niveaux
  - **Syntaxe**
    - Aristote mortel est
    - ⇒ Syntaxe de la *prédication*
    - ⇒ Contrainte liée au langage
  - **Sémantique**
    - Tout Socrates est mortel
    - ⇒ Sémantique de la *quantification*
    - ⇒ Contrainte liée au sens des symboles
  - **Raisonnement**
    - Tout chat est mortel
    - **Or** Socrates est mortel
    - **Donc** Socrates est un chat ?!
    - ⇒ Règles d'inférence (déduction)

Formules bien formées

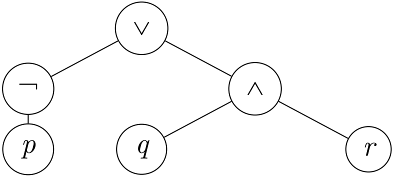
- Langage **formel**
  - **Formules** (dont variables atomiques) : p, q, r ...
  - **Parenthèses** (op. syntaxique) : (et)
  - **Négation** (op. unaire) : $\neg$ (ou !, $\sim$, $\overline{}$)
  - Connecteurs logiques (op. binaires)
    - **Conjonction**, et : $\wedge$ (ou ., &)
    - **Disjonction**, ou : $\vee$ (ou +, |)
    - **Implication** : $\rightarrow$
    - **Équivalence** : $\leftrightarrow$
  - **Priorité** (à gauche) des opérateurs : (,), $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Formules **bien formées** (définition récursive)
    - Si p est une f.b.f. alors $\neg pet(p)$ aussi
    - Si p et q sont des f.b.f. alors $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$ et $p \leftrightarrow q$ aussi
    - Les autres formules ne sont **pas** bien formées

$\Rightarrow$ Syntaxe (hors-contexte) des formules logiques

Arbre d'expression

- **Décomposition** d'une formule sous forme d'**arbre**
  - Éléments : **nœuds** (ronds) et **arcs** (traits)
  - Relations entre nœuds : parent, enfant(s), frère(s)
  - Position des nœuds : **racine** (haut) et **feuilles** (bas)

  $\Rightarrow$ Description de la **structure** de l'expression
    - Nœuds internes : **opérateurs**
    - Feuilles : **atomes**
- Exemple
  - Formule : $\neg p \vee q \wedge r$
  - Équivalente (priorité) à : $\neg(p) \vee ((q) \wedge (r))$



Assignations

- Association de **valeurs** à des **variables atomiques**
  - Les variables atomiques ne se décomposent pas
  - Valeurs de vérité V, F (ou $1, 0, \top, \bot$)

  $\Rightarrow$ Permet le **calcul** des formules
    - Valeur de vérité pour chaque variable atomique
    - Connecteurs logiques qui les séparent
- Exemple
  - Formule : $\neg p \vee q \wedge r$
  - Assignation : $p = V$, $q = V$ et $r = V$
  - Calcul : $\neg V \vee V \wedge V = F \vee V \wedge V = F \vee V = V$
  - Assignation : $p = V$, $q = F$ et $r = V$
  - Calcul : $\neg V \vee F \wedge V = F \vee F \wedge V = F \vee F = F$
  - Assignation : $p = F$, $q = F$ et $r = F$
  - Calcul : $\neg F \vee F \wedge F = V \vee F \wedge F = V \vee F = V$

$\Rightarrow$ Pour n variables, 2^n assignations possibles

Tables de vérité (assignations)

Négation

p	$\neg p$
V	**F**
F	**V**

Conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Disjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Implication

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Équivalence

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Exercice

- Ajouter les parenthèses, déterminer l'arbre d'expression et la table de vérité pour
    - $p \land \neg q$
    - $\neg(p \lor q)$
    - $p \land \neg q \lor \neg p \land q$
    - $\neg(p \land q) \lor (\neg p \land r) \lor (p \land \neg r)$
    - $p \rightarrow q \land r$
    - $\neg p \rightarrow q$
    - $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

Problème

- Exprimez les relations entre les éléments suivants
  - Transports : $\{bus, metro, tram, rer, voiture, taxi, velo, moto, pied, autolib\}$
  - Motorisation : $\{moteur, pedale, 2roues, 4roues\}$
  - Caractéristiques : $\{vehicule, elec, public, proprio, location, payant, gratuit\}$

Problème

- Exprimez les relations entre les éléments suivants
  - Aliments : $\{salade, carotte, herbe, steak, oeuf, lait, biscuit, compote, eau, jus, the, cafe\}$
  - Mode d'alimentation : $\{carnivore, herbivore, omnivore, vegetarien, vegan\}$
  - Moments d'alimentation : $\{repas, petitdej, dejeuner, diner, gouter, encas\}$
  - Restauration : $\{menu, cafegourmant, entree, plat, dessert, boisson\}$

Plan

Comparaison de formules

⇒ Quelles formules sont équivalentes ?

- **Identiques**
  $p \wedge q \rightarrow r$ et $p \wedge q \rightarrow r$
- **Identiques** aux parenthèses près
  $p \wedge q \rightarrow r$ et $(p \wedge q) \rightarrow r$
- **Identiques** à une commutation près
  $p \wedge q \rightarrow r$ et $q \wedge p \rightarrow r$
- Et autres **propriétés** (associativité, distributivité, etc.)
- Pour **toute assignation**, les formules ont **même valeur**
  $p \wedge q \rightarrow r$ et $\neg(p \wedge q) \vee r$
- ...

⇒ Notation avec $\equiv$

⇒ Méthode pour déterminer l'équivalence ?

⇒ Mettre les expressions sous forme **normale**

Équivalence de formules logiques

Faux	$p \wedge F \equiv F$
	$p \vee F \equiv p$
Vrai	$p \wedge V \equiv p$
	$p \vee V \equiv V$
Contradiction	$p \wedge \neg p \equiv F$
Tiers-exclus	$p \vee \neg p \equiv V$
Double négation	$\neg\neg p \equiv p$
Implication	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
Équivalence	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
Lois de De Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Équivalence de formules logiques

Idempotence	$p \land p \equiv p \lor p \equiv p$
Commutativité	$p \land q \equiv q \land p$
	$p \lor q \equiv q \lor p$
Associativité	$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r) \equiv p \land q \land r$
	$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r) \equiv p \lor q \lor r$
Distributivité	$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
	$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$
Absorption	$p \lor (p \land q) \equiv p$
	$p \land (p \lor q) \equiv p$

Formes normales

- Système suffisant de connecteurs : $\neg$, $\wedge$, $\vee$
  - **Littéral** : variable atomique ou sa négation (p ou $\neg p$)
  - **Formes normales**
    - Conjonctive (FNC) : conjonction de disjonctions de littéraux $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$
    - Disjonctive (FND) : disjonction de conjonctions de littéraux $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$
  - Mise sous forme normale
    - Suppression des connecteurs $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
    - Réduction des négations (doubles négations, lois De Morgan)
    - Distributivité, commutativité, absorption
- Exemple (FNC)
  - $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

  $\equiv$ $\neg\neg p \vee (q \wedge r)$

  $\equiv$ $p \vee (q \wedge r)$

  $\equiv$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Exercice

- Mettre sous FNC les formules
  - $\neg(p \wedge q)$
  - $p \vee q \wedge r$
  - $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
  - $p \vee \neg(q \wedge r)$
  - $q \rightarrow \neg p \wedge \neg q \vee r$
  - $(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$
  - $(\neg p \wedge q) \vee r$
  - $p \leftrightarrow q$
  - $\neg(p \vee q) \vee (p \wedge r)$
  - $(p \vee q) \rightarrow r$
  - $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r$

Exercice

- Mettre sous FND les formules
  - $\neg(p \rightarrow q)$
  - $p \wedge \neg(q \wedge r)$
  - $p \wedge (p \rightarrow q)$
- Dire si les équivalences suivantes sont justes
  - $p \wedge q \vee r \equiv \neg(p \rightarrow \neg q) \vee r$
  - $\neg(p \vee q \wedge \neg r) \equiv \neg p \wedge \neg q \vee r$

Problème

- Mettre sous forme logique puis en FNC les propositions
  - Un objet qui n'est ni solide ni gazeux est liquide
  - Il est faux de dire qu'on peut être grand et petit
  - Il n'existe pas de planète qui ne soit ronde
  - Chacun est humain et homme ou humain et femme
  - Si on est riche ou beau alors on ne peut être malheureux
  - Si être riche rend bête, et être bête rend heureux, alors être riche rend heureux
  - On ne peut être bête et malheureux si on est riche

Méthode des mintermes / maxtermes

- Trouver une formule à partir de sa table de vérité
  - Calcul des (min/max)termes pour les formes normales
  - **FND**
    - **Minterme** : pour V, conjonction des littéraux
    - Formule comme disjonction des mintermes
  - **FNC**
    - **Maxterme** : pour F, disjonction des négations de littéraux
    - Formule comme conjonction des maxtermes
  - Exemple

p	q	formule	min/max	terme
V	V	**V**	min	$p \wedge q$
V	F	**F**	max	$\neg p \vee q$
F	V	**V**	min	$\neg p \wedge q$
F	F	**F**	max	$p \vee q$

$\Rightarrow$ FND : $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

$\Rightarrow$ FNC : $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$

Exercice

- Donnez par la méthode des mintermes / maxtermes la FNC et la FND pour la table de vérité suivante

p	q	r	formule
V	V	V	**F**
V	V	F	**V**
V	F	V	**F**
V	F	F	**F**
F	V	V	**V**
F	V	F	**V**
F	F	V	**F**
F	F	F	**V**

- Quelqu'un dit « Être héritier ou travailler permet de ne pas être pauvre », traduisez cette proposition sous forme logique, donnez sa table de vérité, puis calculez sa FNC et FND.

Plan

Théorèmes et démonstrations

- **Système logique**
  - **Théorèmes** : formules admises ou démontrées
  - Les formules admises (faits ou règles) sont des **axiomes**
  - Symbole de la **dérivation logique** : $\vdash$
  - Utilisation de **règles d'inférence** (prémisses → conclusion)
  - Mécanismes d'**interprétation** des formules

  ⇒ Le système est-il **consistant**, **complet** ?
- **Règles d'inférences**
  - **Modus ponens** : $p, p \rightarrow q \vdash q$
  - **Modus tollens** : $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$
  - Autre notation $\dfrac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q}$ (modus ponens)

Théorèmes et démonstrations

- Exemple d'inférence logique
  - **Axiomes**
    - $\vdash \neg(p \wedge q)$
    - $\vdash p$
    - $\vdash r \rightarrow q$
    - $\vdash r \leftrightarrow s$

$\Rightarrow$ **On peut inférer :** $\neg r$

$\Rightarrow$ **On peut inférer :** $\neg s$

Interprétations et modèles

- **Interprétations**
  - Lien entre **sémantique** et **assignations**
  - ⇒ Une formule peut être
    - **Valide** : vraie quelle que soit l'interprétation (tautologie)
    - **Satisfiable** : au moins une interprétation qui la rend vraie
    - **Contingente** : satisfiable et une interprétation la rend fausse
    - **Insatisfiable** : aucune interprétation ne la rend vraie
- **Modèles** de formule
  - Interprétations qui rendent la formule vraie

⇒ En calcul des propositions, interprétations dans {V,F}

⇒ Approfondissement : logique des **prédicats** (quantification)

Résolution par réfutation

- Principe de la **réfutation** (**absurde** / apagogie)
  - Démontrer que q est la conséquence logique de $p_1, p_2 \dots p_n$
  - $\equiv$ démontrer que $p_1, p_2 \dots p_n \vdash q$
  - $\equiv$ démontrer que $\neg(p_1 \wedge p_2 \dots p_n) \vee q$ est *valide*
  - $\equiv$ démontrer que $\neg(\neg(p_1 \wedge p_2 \dots p_n) \vee q)$ est **insatisfiable**
  - $\equiv$ démontrer que $p_1 \wedge p_2 \dots p_n \wedge \neg q$ est **insatisfiable**
- Exemple
  - Axiomes
    - $\vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ (1)
    - $\vdash p \wedge \neg q$ (2)
  - Démonstration que $1, 2 \vdash r$ par réfutation
    - $((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \wedge (p \wedge \neg q) \wedge \neg(r)$
    - $\equiv (\neg p \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
    - $\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
    - $\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge \neg(\neg p \vee q \vee r)$ ...(contradiction $A \wedge \neg A$)

Exercice

- Montrer par réfutation
  - $(p \rightarrow \neg q), q \vdash \neg p$
  - $(\neg p \vee \neg q), p \vdash \neg q$
  - $(p \vee q), (p \vee r), (p \vee s), \neg p \vdash q \wedge r \wedge s$
  - $(\neg p \rightarrow \neg q) \vdash (q \rightarrow p)$
  - $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
  - $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)), \neg r \vdash (\neg p \vee \neg q)$
  - $p \vee q \rightarrow r, p \vee s, \neg s \vdash r$

Complétude et cohérence des systèmes logiques

- **Cohérence** (ou consistance)
  - Il n'existe aucune formule telle qu'elle même et sa négation soient conséquences du système
  - $\Rightarrow$ Programme de Hilbert (Hilbert, 1900)
  - $\Rightarrow$ Contre-exemple : $p, \neg q, p \rightarrow q$
  - $\Rightarrow$ Contre-exemple : paradoxe du barbier (Russel, 1903)
- **Complétude**
  - Toute proposition que l'on sait sémantiquement correcte peut être dérivée par le système
  - $\Rightarrow$ Exemple : calcul des prédicats du 1er ordre (Gödel, 1929)
  - $\Rightarrow$ Contre-exemple : théorème d'incomplétude (Gödel, 1931)

Plan

Politiquement logique

- Prouvez les assertions suivantes par réfutation
  - Tout politicien ment, tu fais de la politique donc tu mens
  - Tout politicien est menteur, tu ne ments pas, donc tu ne fais pas de politique
  - Je connais un politique qui ne ment pas : il n'est pas vrai que tous les politiciens sont des menteurs
  - Dans une démocratie, il y a des élections et des libertés et dans une dictature, il n'y a ni l'un ni l'autre. Donc un régime ne peut être à la fois démocratique et dictatorial

Cuisine logique

- **Sujet** : un étudiant doit manger la veille d'un examen
- Soient les (assertions) propositions suivantes
  - (1) Je peux me faire des pâtes ou aller chercher une pizza
  - (2) Tous les mardis et jeudis, il y a le camion à pizza
  - (3) Si je mange mal et que je me couche tard je rate l'examen
  - (4) Si je ne révise pas mon cours, je vais rater mon examen
  - (5) Si je révise mon cours, je vais me coucher tard

Cuisine logique (suite)

- Questions
  - Traduire toutes les propositions en logique
  - Donner les arbres d'expression des propositions (2) et (3)
  - Mettre la formule (3) sous forme normale conjonctive
  - Faire la table de vérité du (4), puis sa FNC par minmax
  - Prouver par réfutation que le mercredi, l'étudiant mangera nécessairement des pâtes
  - Prouver que s'il veut réussir son examen, l'étudiant devra se coucher tard
  - En supposant qu'il ne sait pas cuisiner (les pâtes seront ratées), que mangera l'étudiant si l'on est un jeudi et qu'il veut réussir l'examen ?
  - Que se serait-il passé si l'examen était un lundi ?