Logique des prédicats

Damien Nouvel

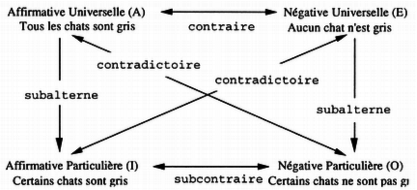
Plan

Propositions vs prédicats

- Avantages et inconvénients la logique des propositions
  - + **Formalisation** logique solide
  - + Possibilité de **démonstrations**
  - + Monde clos
  - - Pas d'**individus** ni de **catégories**
  - - Pas de formules **génériques**
  - - Pas de fonctions
- Exemple
  - Jean est père de Jacques et Alain, Alain est père de Tom.
  - On sait que le père d'un père s'appelle un grand-père.
  - Qui est le grand-père de Tom ?
  - ⇒ Raisonnement logique, évident pour un humain
  - ⇒ Impossible à formuler en logique des propositions !

⇒ Logique des **prédicats**, extension des propositions

Quantité et qualité des formules



Carré logique (Aristote)

- On peut caractériser les propositions selon
  - Leur **quantité** : **universelle** vs **particulière**
  - ⇒ En corrolaire sur la quantité : définir un **ensemble**
    - **extension** (ou dénotation), liste d'**individus**
    - ⇒ Par ex. : $homme \rightarrow damien \vee pierre \vee paul \vee jacques \dots$
    - Intension ou compréhension, selon ce qui les définit
    - ⇒ Par ex. : $homme(x) \rightarrow humain(x) \wedge male(x)$
  - Leur **qualité** : **affirmative** ou **négative**

Éléments

- Élements pour la logique des prédicats :
  - Variables et constantes
    - $V = \{X, Y, Z \dots\}$ et $C = \{a, b, c, pierre, paul, jacques \dots\}$
  - Négation et connecteurs logiques
    - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - **Prédicats**
    - $p(X)$, $q(X, Z)$, $maries(paul, anne)$, $parent(X, Y)$
    - Application vers les valeurs de vérités
  - Fonctions
    - $f(X)$, $g(X, Y)$, $mari(X)$, $cousin(X, Y)$
    - Application vers le domaine
  - **Quantificateurs**
    - $\forall$ (universel) et $\exists$ (existentiel)
    - Opérateurs unaires sur les variables, ayant une **portée**

$\Rightarrow$ Exemple de formule : $\forall X, \exists Y, (femme(Y) \wedge mere(X, Y))$

Mécanisme de prédication

- Appliqués à un ou plusieurs **individus**
- Résultat toujours **vrai ou faux**
- Interprétation générale
  - Unaire : **catégorie** (attribut, propriété) d'un individu
  - Binaire : **relation** entre individus
  - Ternaire, quaternaire ...n-aire
- Souvent associée aux **verbes** (*vs* constantes pour les **noms**)
- Modélisation
  - *Félix est un chat* : $chat(felix)$
  - *Paul est grand* : $grand(paul)$
  - *Paul parle à Jeanne* : $parler(paul, jeanne)$
  - *Paul emprunte un livre à Marie* : $emprunt(paul, livre, marie)$

Définitions

- **Termes**
  - Toute variable ou constante
  - Toute fonction $f(x, y, z)$ avec x, y et z des termes (récursivité)
- Formule **atomique** (par récursivité)
  - Si p est un prédicat à n arguments et $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont des termes, alors $P(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est une formule atomique
- **Formule bien formée**
  - Si F une formule est atomique elle est bien formée
  - Récursivité : $\neg F$, (F), $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \rightarrow G$, $F \leftrightarrow G$
  - Si Q est un quantificateur, X une variable et F une formule bien formée, alors QXF est bien formée
- **Portée** des quantificateurs
  - Si Q est un quantificateur, X une variable, F une formule bien formée, dans QXF,la portée de QX est F

$\Rightarrow$ Exemple : $p(X) \wedge \exists \underline{X}(P(\underline{X}, Y) \wedge \forall \underline{Y} \neg Q(\underline{X}, \underline{Y}) \vee \neg R(\underline{X}, Y))$

Liaison de variables

- Dans une formule, selon la **portée** des quantificateurs
  - Variable **liée** : si elle est dans la portée d'un quantificateur
  - $\Rightarrow$ Exemple : $\forall X p(X)$, $\forall X p(X) \wedge (\exists Y q(X, Y))$
  - Variable **libre** : si elle n'est pas liée
  - $\Rightarrow$ Exemple : $p(X)$, $\forall X(p(X) \wedge q(X, Y))$
- Une formule peut être
  - **Close** : toutes les variables sont liées
  - Ouverte : il existe au moins une variable libre
  - $\Rightarrow$ Nous travaillons sur les formules closes

Sémantique, domaine, interprétation

- Une **interprétation** I est constituée des éléments suivants
  - **Domaine** D : valeurs pour les constantes ou variables
  - Constantes : élément de D
  - Prédicats : application de D^n dans $\{V, F\}$
  - Fonctions : application de D^n dans D

$\Rightarrow$ Une interprétation est **modèle** d'une formule si elle est valide pour le domaine, les constantes, prédicats et fonctions

- Exemple
  - Formule : $\forall X(p(X, Y) \wedge p(Y, Z) \rightarrow p(X, Z))$
  - Domaine : $D = \{paul, jean, jacques, leon, claude\}$
  - Prédicats : $p(X, Y)$ est vrai si X et Y sont cousins
  - Fonctions : pas de fonction

  $\Rightarrow$ Cette interprétation est un modèle pour la formule

Exercices

- Modélisez selon la logique des prédicats
  - Jacques est le fils de Marie
  - Tout le monde a un père
  - Jean aime tout le monde
  - Jacques n'aime pas tout le monde
  - Personne n'aime Jacques
  - Jean aime Marie mais Marie aime quelqu'un d'autre
  - Jean aime une personne qui ne l'aime pas
  - L'ami de mon ami est mon ami

Plan

Substitution

- **Substitution de variables**
  - Remplacement d'une variable par un terme
  - Pour une formule F remplacer X par λ se note $F[X/\lambda]$

  $\Rightarrow$ Exemple : $\forall X \exists Y p(X, Y)[X/Z] = \forall Z \exists Y p(Z, Y)$

$\Rightarrow$ Utile pour la mise sous forme prénexe et la skolémisation, lorsque deux sous-formules ont les mêmes variables

- L'ordre des quantificateurs peut être modifié
  - $\forall X \forall Y \equiv \forall Y \forall X$
  - $\exists X \exists Y \equiv \exists Y \exists X$
  - Attention : $\forall W \exists Y \not\equiv \exists Y \forall X$
    - $\forall X \exists Y aime(X, Y)$: tout le monde aime quelqu'un
    - $\exists Y \forall X aime(X, Y)$: quelqu'un est aimé de tout le monde

Mise sous forme normale prénexe

- Une formule sous **forme prénexe** s'écrit $Q_1 X_1 Q_2 X_2 \dots Q_n X_n F$
  - $Q_1 \dots Q_n$ sont des quantificateurs
  - $X_1 \dots X_n$ sont des variables
  - F est une formule qui ne contient pas de quantificateur

$\Rightarrow$ Amener tous les quantificateurs en début de formule

- Étapes
  - Supprimer les implications et les équivalences
  - Former des littéraux par transférer des négations
    - $\neg\exists XF \equiv \forall X \neg F$
    - $\neg\forall XF \equiv \exists X \neg F$
  - Substituer les variables pour éviter les conflits
  - Mettre les quantificateurs en tête de formule (G libre de X)
    - $QXF \wedge G \equiv QX(F \wedge G)$ et $F \wedge QXG \equiv QX(F \wedge G)$
    - $QXF \vee G \equiv QX(F \vee G)$ et $F \vee QXG \equiv QX(F \vee G)$

Exercices

- Mettre sous forme prénexe
  - $\forall X p(X) \vee \neg\forall Y q(Y)$
  - $\exists X p(X) \vee \neg\exists X q(X)$
  - $\forall X p(X) \rightarrow \forall X q(X)$
  - $\forall X \neg(p(X) \wedge \exists Y q(X, Y))$
  - $\exists X(p(X) \wedge \exists Y q(X, Y) \rightarrow \exists Y r(X, Y))$
- Modéliser et mettre sous forme prénexe
  - si tout le monde est riche il n'y aura pas de vols
  - qui sait conduire une voiture sait conduire toutes les voitures

Forme normale de Skolem

- Formule **universelle** : que des quantificateurs universels

$\Rightarrow$ **Skolémisation** : supprimer les quantificateurs $\exists$

- En début de formule, une **constante** satisfait la formule
  - Il existe un homme qui a marché sur la lune
  - $\equiv$ $\exists X homme(X) \wedge marche(X, lune)$
  - $\Rightarrow$ Substitution : $[X/armstrong]$
  - $\equiv$ $homme(armstrong) \wedge marche(armstrong, lune)$
- Après une quantification universelle, l'individu est une **fonction** des variables
  - Tout avion doit être piloté
  - $\equiv$ $\forall X(avion(X) \rightarrow \exists Y personne(Y) \wedge pilotage(Y, X))$
  - $\equiv$ $\forall X \exists Y(avion(X) \rightarrow personne(Y) \wedge pilotage(Y, X))$
  - $\Rightarrow$ Substitution : $[Y/pilote(X)]$
  - $\equiv$ $\forall X(avion(X) \rightarrow personne(pilote(X)) \wedge pilotage(pilote(X), X))$

Exercices

- Modélisez, mettez sous forme prénexe de skolem conjonctive
  - Il existe une capitale où est construite la Tour Eiffel
  - Tout monument a été conçu par une personne
  - La plus grande ville (d'un pays) est une capitale

Résolution

- **Clause** : disjonction de littéraux

$\Rightarrow$ Conjonction de clauses : forme normal conjonctive

- Forme **standard**
  - Forme prénexe
  - Forme normale de Skolem
  - Forme normale conjonctive (clausale)
- Résolvant de **Robinson** (1965)
  - Si deux clauses F et G sont sous la forme
    - $F = F_1 \vee F_2 \ldots F_i \ldots F_n$
    - $G = G_1 \vee G_2 \ldots G_j \ldots G_n$
  - Et si $F_i \equiv \neg G_j$ alors la clause H résultant de la disjonction de F et G après suppression de F_i et G_j est dite **clause résolvante** de F et G

  $\Rightarrow$ $F_1 \vee F_2 \ldots F_{i-1} \vee F_{i+1} \ldots F_n \vee G_1 \vee G_2 \ldots G_{j-1} \vee G_{j+1} \ldots F_n$