Nombres, ensembles, fonctions

Maths 1

Damien Nouvel

Inalco

Écriture des nombres entiers

Écritures historiques (peu régulières)

- **langue naturelle** « trois », « dix-huit », « quatre-vingt-quinze »
- **chiffres romains** « III », « XVIII », « XCV »

Écriture régulière avec des **chiffres**

- **chiffre arabes** en base 10 avec les symboles $\{0...9\}$
- **nombres** comme écriture de chiffres $c_1c_2c_3$
- **valeur** $c_1 * 100 + c_2 * 10 + c_3 * 1$
- exemple $142 = 1 * 100 + 4 * 10 + 2 * 1$

Généralisation aux **symboles** avec une **base**

- **base** comme ensemble de b **symboles**
- écriture comme **séquence** de k symboles $s_1s_2...s_k$
- valeur $\Sigma_{i=1...k}c_i * b^(k-i))$
- bases souvent utilisées
  - **binaires** en base 2 $\{0, 1\}$
  - **hexadécimaux** en base 16 de 0 à 9 puis $\{A, B, C, D, E, F\}$

Écriture des nombres réels

Écriture d'un **nombre décimal** $n = e, d$

- **partie entière** comme **entier relatif** e
- séparateur de la partie décimale avec « , » en français
  - les anglophones utilisent
    - le point comme séparateur
    - la virgule pour les milliers
- **partie décimale** comme **entier naturel** d
- **valeur** $e + d * 10^{-|d|}$ avec $|d|$ le nombre de chiffres dans d

Écriture d'une **fraction** n/d

- numérateur comme **entier relatif** n
- dénominateur comme **entier naturel** d
- écriture en nombre décimal avec **arrondi** $2/3 = 0, 67$

Notation scientifique

Difficultés avec les nombres très grands ou très petits

- difficulté d'**écriture** (beaucoup de symboles)
- appréciation difficile des **ordres de grandeur**

Utilisation de la **notation scientifique** c, dEn

- il n'y a qu'**un seul** chiffre c avant la virgule
- la partie décimale d est un entier naturel
- le symbole E pour la **multiplication par une puissance de 10**
- l'**exposant** n est la puissance de 10 signée (+ ou −)
- **valeur** $c, d * 10^n$
- correspond à la notation scientifique courante $c, d * 10^n$
- souvent utilisés dans les logiciels (Excel, Python, etc.)

Exemples

- $4, 5E5 = 450000$
- $3, 7E{-3} = 0, 0037$

Ensembles de nombres

Quelques ensembles de nombres

- $\mathbb{N}$ **entiers naturels** (positifs)
- $\mathbb{Z}$ **entiers relatifs** (entiers positifs et négatifs)
- $\mathbb{D}$ **décimaux**, nombres avec virgules
- $\mathbb{Q}$ **rationnels**, nombres qui peuvent s'érire comme fractions
- $\mathbb{R}$ **réels** (comme $\sqrt{2}$ ou π)
- $\mathbb{C}$ **complexes** (partie réelle et partie « imaginaire »)

Ensembles de nombres comme hiérarchie $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Intervalles

- notations des bornes entre crochets $x \in [0;2]$ pour les nombres réels
  - les anglophones utilisent la virgule au lieu du point virgule
- valeur réelle entre les bornes $[0,2] = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0, x \leqslant 2\}$
- exclusion des bornes $]0,2[= \{x \in \mathbb{R} | x > 0, x < 2\}$
- doubles crochets pour les nombres entiers $[\![0,2]\!] = \{0,1,2\}$

Les ensembles

Notion formalisée fin XIX$^{\text{ème}}$(Cantor, Hilbert) : « tout rassemblement en une totalité d'objets [...] déterminés et bien différenciés qui seront appelés les éléments »

Principes généraux

- énumération des éléments avec les **accolades** $\{1, 2, 3\}$
- l'ordre n'importe pas et sans répétitions $\{1, 0, 1\} = \{0, 1\}$
- **ensemble vide** $\varnothing$
- **cardinalité** par barres verticales $|\{1, 3, 7\}| = 3$
- peuvent être nommés par des **variables** $E = \{1, 2, 3\}$
- éléments **quelconques**
  - nombres $E = \{1, 2, 3\}$
  - caractères $E = \{a, b, c\}$
  - mots $E = \{chat, chien\}$
  - mélange hétérogène $E = \{1, chat, abs, £\}$
- un élément **appartient** à un ensemble (epsilon) $3 \in \{1, 2, 3\}$
- **sous-ensemble** avec $\subset$ (strict) $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$ (avec égalité $\subseteq$)

Définition d'un ensemble

Définition par **extension**

- énumération des éléments $E = \{1, 2, 3\}$
- utilisation (peu formelle) des trois petits points $E = \{1, 2, 3, ...\}$

Définition par **compréhension** (ou intention)

- permet de **décrire** les éléments sans les énumérer
- description en **langue naturelle** (peu formelle)
  - $E = \{nombre\ pairs\}$
  - $E = \{mots\ de\ plus\ de\ cinq\ lettres\}$
- utilisation **critères** avec la barre verticale ou la virgule
  - $E = \{x | x/2\ est\ entier\}$
  - $E = \{m, taille(m) > 5\}$

Opérations sur les ensembles

Deux opérations principales

- **union** $\cup$ (en logique disjonction « ou » notée $\vee$)
  - réunir deux ensembles (toujours sans répétitions)
  - exemple $\{3,1,4\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$
- **intersection** $\cap$ (en logique conjonction « et » notée $\wedge$)
  - éléments communs aux deux ensembles
  - exemple $\{3,1,4\} \cap \{2,3,4,5\} = \{3,4\}$

Deux autres opérations

- **complémentaire** - (en logique négation notée $\neg$)
  - éléments qui ne sont pas dans un ensemble
  - exemple $\overline{\{3,1,4\}} \cap [\![0,5]\!] = \{0,2,5\}$
- **différence** $\setminus$
  - éléments qui sont dans le premier mais pas dans le second
  - exemple $\{3,1,4\} \setminus \{2,3,4,5\} = \{1\}$

Propriétés des opérateurs

Quelques **propriétés** des opérateurs

- ensembles **disjoints** n'ont pas d'éléments communs $E \cap F = \varnothing$
- **commutativité** $E \cup F = F \cup E$ et $E \cap F = F \cap E$
- **idempotence** $E \cup E = E \cap E = E$
- pour l'ensemble vide
  - $E \cap \varnothing = \varnothing$
  - $E \cup \varnothing = E$
- **distributivité**
  - $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
  - $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

Cardinalité des ensembles

- $|\varnothing| = 0$
- $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$

Produit cartésien de deux ensembles

Énumération des **possibilités** de combinaisons de **deux ensembles**

- notation par le symbole **croix** $E \times F$
- les éléments du produits sont des « paires »
- éléments notés avec des **parenthèses** $(x, y) \in E \times F$
- **cardinalité** du produit cartésien $|E \times F| = |E| * |F|$
- utilisation de la puissance $E \times E = E^2$

Exemples

- positions dans un jeu d'échec
  - colonnes avec des lettres $C = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$
  - lignes avec des chiffres $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
  - ensemble des positions possibles
    $C \times L = \{(A, 1), (A, 2), (A, 3), ...(B, 1), (B, 2)...(H, 8)\}$
  - une position $(D, 1) \in C \times L$
- position sur une carte
- taille et âge d'une personne
- modèle et couleur d'une voiture

Produit cartésien de plusieurs ensembles

Extension du produit cartésien à plus de deux ensembles

- combinaison de plusieurs ensembles $E \times F \times G$
- élément avec des **composantes** ou **dimensions** $(x, y, z) \in E \times F \times G$
- même calcul de **cardinalité** $|E \times F \times G| = |E| * |F| * |G|$
- triplets, quadruplets, etc. selon le nombre de dimensions

Structure générale de **n-uplet**

- élément d'un produit cartésien $t = (x, y, z, t) \in E \times F \times G \times H$
- données dans l'espace mathématique considéré
  - pour les nombres, notion de **vecteur**
  - pour les bases de données, des **enregistrements**
- les composants peuvent être numérotées par indices
  - $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$

Vecteurs pour compter des termes dans des documents

Exemple avec trois phrases

- d1 : « un beau chat »
- d2 : « un chat et un gros chat »
- d3 : « un beau chien et un beau chat et un gros lion »

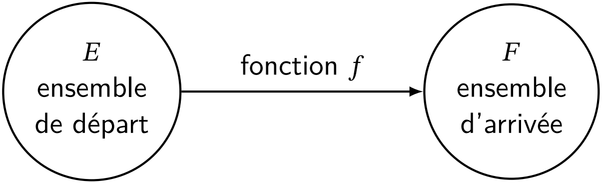
Représentation de documents sous forme de **vecteurs**

- vocabulaire au travers des documents
  $(un, beau, chat, et, gros, chien, lion)$
- chaque **document** comme fréquences des mots $d_i \in \mathbb{N}^7$

	un	beau	chat	et	gros	chien	lion
d1	1	1	1	0	0	0	0
d2	2	0	2	1	1	0	0
d3	3	2	1	2	1	1	1

Document $d2$ est représenté par le **vecteur** : $d2 = (2, 0, 2, 1, 1, 0, 0)$

Définition des fonctions



Définition d'une fonction

- **correspondances** entre deux ensembles $f : E \to F$
  - ensemble de **départ** E (ou domaine)
  - ensemble d'**arrivée** F
- **application** à un **élément** de l'ensemble de départ
  - ensemble de départ en **paramètre** de la fonction $f(x)$
  - résultat **déterminé** par les paramètres $y = f(x)$

Exemple, multiplication d'un entier naturel par deux

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $f(x) = 2x$

Quelques compléments sur les fonctions

Une fonction peut prendre **plusieurs paramètres**

- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $f(x, y) = 3x - 5y$

On peut (souvent) calculer avec une fonction

- sa **dérivée**
  pour $f(x) = 2x$ la dérivées est $f'(x) = 2$
- son **intégrale**
  pour $f(x) = 2x$ son intégrale est $f(x) = x^2$
- sa fonction **inverse**
  pour $f(x) = 2x$ est $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

Les fonctions peuvent être

- **injectives** chaque élément a un seul antécédent
- **surjectives** tous les éléments du domaine cible sont atteints
- **bijectives** si elle est injective et surjective

Quelques notations mathématiques courantes

Calculs sur des séries de nombres indexés $X = (x_1, x_2, x_3 ... x_n)$:

- **somme** des éléments $\Sigma_i x_i = x_1 + x_2 + x_3 ... + x_n$
- **produit** des éléments $\Pi_i x_i = x_1 * x_2 * x_3 ... * x_n$

Fonctions mathématiques courantes :

- **valeur absolue** : $|x|$
- **racine** (carrée) : $\sqrt{x}$
- **factorielle** : $n! = \Pi_{x \in [\![1,n]\!]} x$
- **exponentielle** : $e^x = exp(x)$
- **logarithme** : $log(x)$

Exemple

- $4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$
- $\Sigma_{i \in \{1,2,3\}} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$