Probabilités et statistiques

Maths 1

Damien Nouvel

Inalco

Les mondes des probabilités et de statistiques

Représentation de phénomènes quantifiés

- **probabilités**
  - modélisation théorique
  - monde « fermé »
  - ensembles d'évènements
  - évaluation des probabilité $P \in [0, 1]$
- **statistiques**
  - collecte et analyse de données
  - fréquence et répartition des évènements

Notions **mathématiques**

- théorie des ensembles
- combinatoire
- séries de données
- fonctions

Utilisation de **variables aléatoires**

Notations et formules sur les évènements

Notations pour des événements $\{A, B\}$:

- **Négation** $\overline{A}$
- **Intersection** (conjonction, probabilité jointe) $A \cap B$
- **Union** (disjonction) $A \cup B$

Axiomes

- $P(A \cup \overline{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- si A et B sont **disjoints** $P(A \cap B) = 0$ $\big($cat $A \cap B = \emptyset\big)$
- si A et B sont **indépendants** $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (**théorème de Bayes**)
  probabilité **conditionnelle** de A **sachant que** B est réalisé

Modélisations par calcul combinatoire

Calcul de **combinatoire** sur des **ensembles** d'évènements

$$P = \frac{nombre\ de\ succès}{nombre\ de\ configurations\ possibles} = \frac{[\{succès\}]}{[\{possibilités\}]}$$

Exemples

- lancer de dés (obtenir un ou plusieurs 6)
  - obtenir un 6
  - obtenir trois 6 d'affilée
  - obtenir un 6 sur trois lancers
- jeu de cartes
  - tirer un roi
  - tirer le roi de cœur puis le roi de carreau
  - tirer le roi de cœur puis le remettre et le re-tirer
  - tirer un roi de cœur, une dame de cœur, un valet de cœur
  - tirer les trois figures de cœur quelque soit l'ordre

Combinatoire d'évènements

Tirages d'ensembles selon

- **nombre** d'éléments dans l'ensemble n et tirés k
- **remise** est-ce que l'on remet les éléments tirés
- **ordre** est-ce l'ordre est important

Combinatoires

- **produit cartésien** n^k (n-uplets ordonnés avec remise)
- **permutations** $n!$ (n-uplets ordonnés sans remise)
- **arrangements** A_n^k (k-uplets ordonnés sans remise)
  $A_n^k = n * (n-1) * (n-2) * ...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
  sélection de k éléments ordonnés parmi n
- **combinaisons** $\binom{n}{k}$ (ou C_n^k) (sous-ensembles)
  $C_n^k = \frac{n!}{k!*(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*...(n-k)}{k*(k-1)*(k-2)*...1}$
  combinaison de k éléments donne $k!$ permutations
  $C_n^k * k! = A_n^k$

Récapitulatif des calculs par combinatoire

k parmi n	avec ordre	sans ordre
avec remise	n^k	(pas au programme)
sans remise	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Distributions de probabilités

Distribution ou répartition des probabilités

- valeurs d'une variable aléatoire $X \in E$
- $\forall X \in E P(X) \in [0, 1]$
- $\forall X_1 \in E, X_2 \in E P(X_1 \cap X_2) = 0$
- $\Sigma_{X \in E} P(X) = 1$

Permet de **répartir** les probabilités d'évènements

Souvent représentée sous forme de **courbe**

Loi binomiale

Répétition k fois d'un tirage aléatoire

- probabilité **individuelle** d'un succès p
- **nombre d'essais** n
- évaluation de la probabilité du **nombre de succès** k

$$P(n,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- $\binom{n}{k}$ nombre de configurations qui donne k succès
- p^k probabilité des succès
- $(1-p)^{n-k}$ probabilité des échecs

Estimateurs statistiques

Soit une **série** x de données $(x_1, x_2 ... x_n)$

- **moyenne** $\mu_x = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1...n} x_i$ (aussi notée $\overline{x}$ ou $|X|$)
- variance $V(X) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1...n}(x_i - \mu_x)^2$
- **écart-type** $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma_{i=1...n}(x_i - \mu_x)^2}$

Soient **deux séries** $(x_1, x_2 \dots x_n)$ et $(y_1, y_2 \dots y_n)$

- **covariance** $\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1...n}(x_i - \mu_x) * (y_i - \mu_y)$
- **coefficient de corrélation** $r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x * \sigma_y}$

  valeur dans $[-1, 1]$ (de covariant à contravariant)